Invariants quantiques, catégories tensorielles et (co)monades de Hopf

Alain Bruguières

(Université Montpellier 2)

à partir de travaux
en collaboration avec Alexis Virelizier et Steve Lack [BLV]
et avec Sonia Natale [BN]

20ème anniversaire du

groupe de travail du mercredi soir

Université Paris 7, 1er et 2 février 2011

Pourquoi des monades ?

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique ⇒ **catégories tensorielles**

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)
- Le monde non tressé est relié au monde tressé via le centre catégorique $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)
- Le monde non tressé est relié au monde tressé via le centre catégorique $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. On a besoin de comprendre cette construction *algébriquement*

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)
- Le monde non tressé est relié au monde tressé via le centre catégorique $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. On a besoin de comprendre cette construction *algébriquement*
- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tressée avec un coend $C = \int^{X \in \mathcal{C}} {}^{\vee}X \otimes X$, alors C est une **algèbre de Hopf** *dans* $\mathcal{C}$ et

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)
- Le monde non tressé est relié au monde tressé via le centre catégorique $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. On a besoin de comprendre cette construction *algébriquement*
- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tressée avec un coend $C = \int^{X \in \mathcal{C}} {}^{\vee}X \otimes X$, alors C est une **algèbre de Hopf** *dans* $\mathcal{C}$ et
  $$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{\{C\text{- modules dans } \mathcal{C}\}\}$$
- Si $\mathcal{C}$ n'est pas tressée, on n'a pas de notion d'algèbre de Hopf !

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés
  d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)
- Le monde non tressé est relié au monde tressé via le centre catégorique $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. On a besoin de comprendre cette construction *algébriquement*
- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tressée avec un coend $C = \int^{X \in \mathcal{C}} {}^{\vee}X \otimes X$, alors C est une **algèbre de Hopf** *dans* $\mathcal{C}$ et
  $$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{\{C\text{-modules dans } \mathcal{C}\}\}$$
- Si $\mathcal{C}$ n'est pas tressée, on n'a pas de notion d'algèbre de Hopf ! Cependant, il y a (dans les bons cas) une *monade* Z sur $\mathcal{C}$ telle que
  $$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{\{Z\text{-modules dans } \mathcal{C}\}\}$$

Pourquoi des monades ?

- Etudier les invariants quantiques de 3-variétés d'un point de vue catégorique $\Rightarrow$ **catégories tensorielles**
- Comparer les invariants tressés (à la Reshetikhin Turaev) et les invariants non tressés (à la Turaev Viro)
- Le monde non tressé est relié au monde tressé via le centre catégorique $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. On a besoin de comprendre cette construction *algébriquement*
- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tressée avec un coend $C = \int^{X \in \mathcal{C}} {}^{\vee}X \otimes X$, alors C est une **algèbre de Hopf** *dans* $\mathcal{C}$ et
$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{\{C\text{-modules dans } \mathcal{C}\}\}$$
- Si $\mathcal{C}$ n'est pas tressée, on n'a pas de notion d'algèbre de Hopf ! Cependant, il y a (dans les bons cas) une *monade* Z sur $\mathcal{C}$ telle que
$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{\{Z\text{-modules dans } \mathcal{C}\}\}$$
- Lorsqu'on traduit les structures catégoriques en termes de structures algébriques additionnelles sur la monade Z, on aboutit au concept de **monade de Hopf**

Plan de l’exposé

1. Invariants quantiques et la conjecture de Turaev

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

présentation de M^3 + donnée catégorique $\rightsquigarrow$ invariant quantique

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

présentation de M^3 + donnée catégorique $\rightsquigarrow$ invariant quantique

- **Dans le cadre tressé :**

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

présentation de M^3 + donnée catégorique $\rightsquigarrow$ invariant quantique

- **Dans le cadre tressé :** *Reshetikhin-Turaev (91) :*

chirurgie  + $\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire $\rightsquigarrow$ $\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)$

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

présentation de M^3 + donnée catégorique $\rightsquigarrow$ invariant quantique

- **Dans le cadre tressé :** *Reshetikhin-Turaev (91) :*

chirurgie  + $\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire $\rightsquigarrow$ $\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)$

- **Dans le cadre non tressé :**

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

présentation de M^3 + donnée catégorique $\rightsquigarrow$ invariant quantique

- **Dans le cadre tressé :** *Reshetikhin-Turaev (91) :*

chirurgie  + $\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire $\rightsquigarrow$ $\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)$

- **Dans le cadre non tressé :** *Turaev-Viro (92)/Barrett-Westbury :*

triangulation  + $\mathcal{C}$ catégorie de fusion sphérique, $\dim \mathcal{C} \neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{TV}_{\mathcal{C}}(M)$

Deux familles d'invariants quantiques de 3-variétés

présentation de M^3 + donnée catégorique $\rightsquigarrow$ invariant quantique

- **Dans le cadre tressé :** *Reshetikhin-Turaev (91) :*

chirurgie  + $\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire $\rightsquigarrow$ $\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)$

- **Dans le cadre non tressé :** *Turaev-Viro (92)/Barrett-Westbury :*

triangulation  + $\mathcal{C}$ catégorie de fusion sphérique, $\dim \mathcal{C} \neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{TV}_{\mathcal{C}}(M)$

Problème

Comparer les invariants RT and TV.

Comparaison de RT et TV

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :**

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :** *Turaev (93), Roberts (95)*

  $\mathcal{B}$ fusion modulaire $\implies$ $\mathcal{B}$ sphérique (et $\dim \mathcal{B} \neq 0$)

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :** *Turaev (93), Roberts (95)*

  $\mathcal{B}$ fusion modulaire $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ sphérique (et $\dim \mathcal{B} \neq 0$) et :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)\,\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(-M)$$

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :** *Turaev (93), Roberts (95)*

  $\mathcal{B}$ fusion modulaire $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ sphérique (et $\dim \mathcal{B} \neq 0$) et :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)\,\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(-M)$$

- **Cas non tressé :**

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :** *Turaev (93), Roberts (95)*

  $\mathcal{B}$ fusion modulaire $\implies$ $\mathcal{B}$ sphérique (et $\dim \mathcal{B} \neq 0$) et :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)\,\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(-M)$$

- **Cas non tressé :** *Müger (02)*

  $\mathcal{C}$ catégorie de fusion sphérique sur $\Bbbk$ corps alg. clos, $\dim \mathcal{C} \neq 0$

  $\implies$ le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est modulaire

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :** *Turaev (93), Roberts (95)*

  $\mathcal{B}$ fusion modulaire $\implies$ $\mathcal{B}$ sphérique (et $\dim \mathcal{B} \neq 0$) et :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)\,\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(-M)$$

- **Cas non tressé :** *Müger (02)*

  $\mathcal{C}$ catégorie de fusion sphérique sur $\Bbbk$ corps alg. clos, $\dim \mathcal{C} \neq 0$

  $\implies$ le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est modulaire

Conjecture (Turaev and al.)

Sous les hypothèses du théorème de Müger :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{C}} = \mathrm{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$$

Comparaison de RT et TV

- **Cas tressé :** *Turaev (93), Roberts (95)*

  $\mathcal{B}$ fusion modulaire $\implies$ $\mathcal{B}$ sphérique (et $\dim \mathcal{B} \neq 0$) et :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M)\,\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(-M)$$

- **Cas non tressé :** *Müger (02)*

  $\mathcal{C}$ catégorie de fusion sphérique sur $\Bbbk$ corps alg. clos, $\dim \mathcal{C} \neq 0$

  $\implies$ le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est modulaire

Conjecture (Turaev and al.)

Sous les hypothèses du théorème de Müger :

$$\mathrm{TV}_{\mathcal{C}} = \mathrm{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$$

▹ implique Turaev-Roberts

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

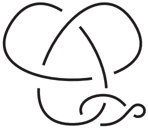
$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

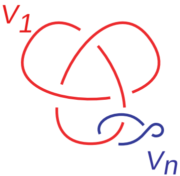
$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans



L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans



$\in \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(\mathbb{1}) = \mathbb{k}$

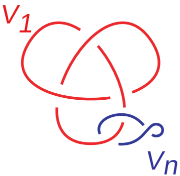
$V_1, \ldots, V_n$ objets scalaires de $\mathcal{B}$

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans

$$\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M) = \sum \mathrm{coef}(V_1, \ldots, V_n)$$



$$\in \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(\mathbb{1}) = \mathbb{k}$$

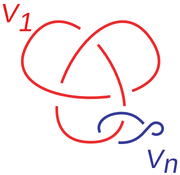
$V_1, \ldots, V_n$ objets scalaires de $\mathcal{B}$

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans

$\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M) = \quad \sum \mathrm{coef}(V_1, \ldots, V_n)$



$\in \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(\mathbb{1}) = \Bbbk$

$V_1, \ldots, V_n$ objets scalaires de $\mathcal{B}$

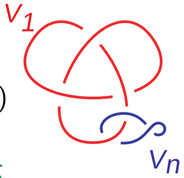
Glissement d'anse

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

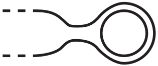
$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans

$$\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M) = \quad \nu_L \quad \sum \mathrm{dim}_q(V_1) \cdots \mathrm{dim}_q(V_n)$$



$V_1, \ldots, V_n$ objets scalaires de $\mathcal{B}$

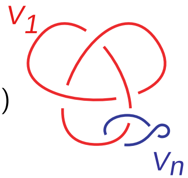
Glissement d'anse  $\leftrightarrow$ 

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans

$$\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M) = \nu_L \sum \dim_q(V_1) \cdots \dim_q(V_n)$$



$V_1, \ldots, V_n$ objets scalaires de $\mathcal{B}$

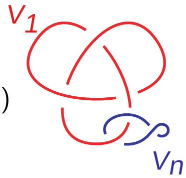
Coefficient de normalisation : $\nu_L = \Delta_+^{b_- - n} \Delta_-^{-b_-}$

L'invariant de Reshetikhin-Turaev (1991)

$\mathcal{B}$ catégorie de fusion modulaire

$M^3 = S^3_L$, où $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ est un entrelacs en rubans

$$\mathrm{RT}_{\mathcal{B}}(M) = \nu_L \sum \dim_q(V_1) \cdots \dim_q(V_n)$$



$V_1, \ldots, V_n$ objets scalaires de $\mathcal{B}$

Coefficient de normalisation : $\nu_L = \Delta_+^{b_- - n} \Delta_-^{-b_-}$

Problème :

On veut appliquer ceci à $\mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ mais on n'a pas de description facile à utiliser des objets scalaires de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$
$\rightsquigarrow$ on a besoin d'un algorithme différent pour calculer $\mathrm{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$ 

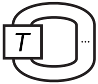
où $T =$ 

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$ 

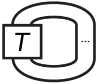
où $T =$  $\overset{\text{propriété}}{\underset{\text{universelle}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$ 

où $T =$ 
$\overset{\text{propriété}}{\underset{\text{universelle}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

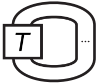
- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$  où $T =$  $\overset{\text{propriété}}{\underset{\text{universelle}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

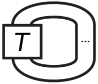
- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha \colon \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$ 

où $T =$  $\underset{\text{universelle}}{\overset{\text{propriété}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

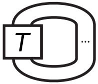
- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha \colon \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans $\tau_{\mathcal{B}}(L; \alpha) := \langle \phi_T, \alpha^{\otimes n} \rangle \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$  où $T =$  $\overset{\text{propriété}}{\underset{\text{universelle}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T : C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

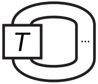
- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha : \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans $\tau_{\mathcal{B}}(L; \alpha) := \langle \phi_T, \alpha^{\otimes n} \rangle \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$
- α intégrale de $C \rightsquigarrow$ invariant de 3-variétés

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$ 

où $T =$  $\overset{\text{propriété}}{\underset{\text{universelle}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

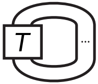
- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha \colon \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans $\tau_{\mathcal{B}}(L; \alpha) := \langle \phi_T, \alpha^{\otimes n} \rangle \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$
- α intégrale de $C \rightsquigarrow$ invariant de 3-variétés $\tau(M; \alpha) := \nu_L \, \tau_{\mathcal{B}}(L; \alpha)$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$  où $T =$  $\xrightsquigarrow[\text{universelle}]{\text{propriété}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

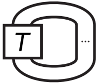
- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha \colon \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans $\tau_{\mathcal{B}}(L; \alpha) := \langle \phi_T, \alpha^{\otimes n} \rangle \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$
- α intégrale de $C \rightsquigarrow$ invariant de 3-variétés $\tau(M; \alpha) := \nu_L\, \tau_{\mathcal{B}}(L; \alpha)$
- $\mathcal{B}$ **fusion :** $\exists C = \sum_i {}^{\vee}V_i \otimes V_i$, $\exists \alpha$ intégrale $\rightsquigarrow \tau_{\mathcal{B}}(M; \alpha) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}$

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^\vee X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$  où $T =$  $\overset{\text{propriété}}{\underset{\text{universelle}}{\rightsquigarrow}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha \colon \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans $\tau_{\mathcal{B}}(L;\alpha) := \langle \phi_T, \alpha^{\otimes n} \rangle \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$
- α intégrale de $C \rightsquigarrow$ invariant de 3-variétés $\tau(M;\alpha) := \nu_L \, \tau_{\mathcal{B}}(L;\alpha)$
- $\mathcal{B}$ **fusion :** $\exists C = \sum_i {}^\vee V_i \otimes V_i$, $\exists \alpha$ intégrale $\rightsquigarrow \tau_{\mathcal{B}}(M;\alpha) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}$

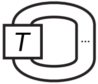
Remarque : On peut calculer ϕ_T explicitement au moyen des *diagrammes de Hopf*

La construction de Lyubashenko

$\mathcal{B}$ catégorie en rubans (pas forcément de fusion, ni même linéaire)

On suppose que $\mathcal{B}$ admet un ***coend*** $C = \mathrm{coend}(\mathcal{B}) = \int^{X \in \mathcal{B}} {}^{\vee}X \otimes X$

$M \simeq S^3_L, \quad L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$L \sim$ 

où $T =$  $\xrightarrow[\text{universelle}]{\text{propriété}}$ $\phi_T \colon C^{\otimes n} \to \mathbb{1}$

- C est une algèbre de Hopf *(Deligne, Majid)* avec un accouplement de Hopf $\omega_C = \phi_{t^2}$.
- Tout $\alpha \colon \mathbb{1} \to C$ tq $S\alpha = \alpha \rightsquigarrow$ invariant d'entrelacs en rubans $\tau_{\mathcal{B}}(L;\alpha) := \langle \phi_T, \alpha^{\otimes n} \rangle \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$
- α intégrale de $C \rightsquigarrow$ invariant de 3-variétés $\tau(M;\alpha) := \nu_L\, \tau_{\mathcal{B}}(L;\alpha)$
- $\mathcal{B}$ **fusion :** $\exists C = \sum_i {}^{\vee}V_i \otimes V_i$, $\exists \alpha$ intégrale $\rightsquigarrow \tau_{\mathcal{B}}(M;\alpha) = \mathrm{RT}_{\mathcal{B}}$

Remarque : On peut calculer ϕ_T explicitement au moyen des *diagrammes de Hopf*

Notre stratégie : calculer le coend du centre

Exemple standard

A algèbre / $\Bbbk$ corps.

Exemple standard

A algèbre / $\mathbb{k}$ corps. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_{\mathbb{k}} A, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(E, N)$$

Exemple standard

A algèbre / $\Bbbk$ corps. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_{\Bbbk} A, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, N)$$

En d'autres termes on a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_A \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \arrow[u, bend left, "F = ? \otimes_{\Bbbk} A_A"] \end{tikzcd}$$

Exemple standard

A algèbre / $\mathbb{k}$ corps. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_{\mathbb{k}} A, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(E, N)$$

En d'autres termes on a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_A \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}} \arrow[u, bend left, "F=?\otimes_{\mathbb{k}} A_A"] \end{tikzcd}$$

L'endofoncteur $T = UF\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}}$, $E \mapsto E \otimes_k A$ est une monade, et la catégorie des T-modules est Mod_A.

Exemple standard

A algèbre / $\mathbb{k}$ corps. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_{\mathbb{k}} A, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(E, N)$$

En d'autres termes on a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_A \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}} \arrow[u, bend left, "F=?\otimes_{\mathbb{k}} A_A"] \end{tikzcd}$$

L'endofoncteur $T = UF\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}}$, $E \mapsto E \otimes_k A$ est une monade, et la catégorie des T-modules est Mod_A.

Dualité tannakienne : A est une bigèbre $\Leftrightarrow$
Mod_A est monoïdale et U est monoïdal fort

Exemple standard

A algèbre / $\mathbb{k}$ corps. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_{\mathbb{k}} A, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(E, N)$$

En d'autres termes on a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_A \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}} \arrow[u, bend left, "F=?\otimes_{\mathbb{k}} A_A"] \end{tikzcd}$$

L'endofoncteur $T = UF\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}}$, $E \mapsto E \otimes_k A$ est une monade, et la catégorie des T-modules est Mod_A.

Dualité tannakienne : A est une algèbre de Hopf $\Leftrightarrow$ Mod_A est monoïdale close [c-à-d a des Homs internes] et U est monoïdal fort clos

Cette caractérisation des algèbres de Hopf n'utilise pas le tressage de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{k}}$.

Exemple standard

A algèbre / $\Bbbk$ corps. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_{\Bbbk} A, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, N)$$

En d'autres termes on a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_A \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \arrow[u, bend left, "F = ?\otimes_{\Bbbk} A_A"] \end{tikzcd}$$

L'endofoncteur $T = UF : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$, $E \mapsto E \otimes_k A$ est une monade, et la catégorie des T-modules est Mod_A.

Dualité tannakienne : A est une algèbre de Hopf $\Leftrightarrow$ Mod_A est monoïdale close [c-à-d a des Homs internes] et U est monoïdal fort clos

Cette caractérisation des algèbres de Hopf n'utilise pas le tressage de $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. On la traduit en termes de la monade T.

Monades

Soit C une catégorie. La catégorie $\mathrm{EndoFun}(C)$ est monoïdale stricte ($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_C$)

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte ($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est une algèbre (=monoïde) dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \ \text{(produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \ \text{(unité)}$$

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte ($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est une algèbre (=monoïde) dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Un T-module (ou algèbre) est une paire (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r\colon T(M) \to M$ tq

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte ($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est une algèbre (=monoïde) dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Un T-module (ou algèbre) est une paire (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r\colon T(M) \to M$ tq

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}^T$ catégorie des T-modules.

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte ($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est une algèbre (=monoïde) dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Un T-module (ou algèbre) est une paire (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r\colon T(M) \to M$ tq

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}^T$ catégorie des T-modules.

Exemple

A algèbre dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$
$\rightsquigarrow$ $T = ? \otimes A\colon X \mapsto X \otimes A$ est une monade sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^T = \mathrm{Mod}\text{-}A$

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte ($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est une algèbre (=monoïde) dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu : T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta : 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Un T-module (ou algèbre) est une paire (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r : T(M) \to M$ tq

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}^T$ catégorie des T-modules.

Exemple

A algèbre dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$
$\rightsquigarrow$ $T = ? \otimes A : X \mapsto X \otimes A$ est une monade sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^T = \mathrm{Mod}\text{-}A$
$T' = A \otimes ?$ est une monade sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{T'} = A\text{-}\mathrm{Mod}$

Monades et adjonctions

Une monade T sur une catégorie $\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^T \arrow[d, bend left, "U^T"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F^T"] \end{tikzcd}$$

où $U^T(M, r) = M$ et $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$.

Monades et adjonctions

Une monade T sur une catégorie $\mathcal{C} \rightsquigarrow$ une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^T \arrow[d, bend left, "U^T"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F^T"] \end{tikzcd}$$

où $U^T(M, r) = M$ et $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$.

Une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ une monade $T = (UF, \mu := U(\varepsilon_F), \eta)$ sur $\mathcal{C}$

où $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to UF$ et $\varepsilon : FU \to 1_{\mathcal{D}}$ sont les morphismes d'adjonction.

$\rightsquigarrow$

Monades et adjonctions

Une monade T sur une catégorie $\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^T \arrow[d, bend left, "U^T"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F^T"] \end{tikzcd}$$

où $U^T(M,r) = M$ et $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$.

Une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ une monade $T = (UF, \mu := U(\varepsilon_F), \eta)$ sur $\mathcal{C}$

où $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to UF$ et $\varepsilon : FU \to 1_{\mathcal{D}}$ sont les morphismes d'adjonction.

$\rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[dr, bend left, "U"] & & \mathcal{C}^T \arrow[dl, bend left, "U^T"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend left, "F^T"] & \end{tikzcd}$$

Monades et adjonctions

Une monade T sur une catégorie $\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^T \arrow[d, bend left, "U^T"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F^T"] \end{tikzcd}$$
où $U^T(M,r) = M$ et $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$.

Une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ une monade $T = (UF, \mu := U(\varepsilon_F), \eta)$ sur $\mathcal{C}$

où $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to UF$ et $\varepsilon : FU \to 1_{\mathcal{D}}$ sont les morphismes d'adjonction.

$\rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, bend left, "K"] \arrow[dr, bend left, "U"] & & \mathcal{C}^T \arrow[dl, bend left, "U^T"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend left, "F^T"] & \end{tikzcd}$$

Monades et adjonctions

Une monade T sur une catégorie $\mathcal{C} \rightsquigarrow$ une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^T \arrow[d, bend left, "U^T"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F^T"] \end{tikzcd}$$

où $U^T(M,r) = M$ et $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$.

Une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ une monade $T = (UF, \mu := U(\varepsilon_F), \eta)$ sur $\mathcal{C}$

où $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to UF$ et $\varepsilon : FU \to 1_{\mathcal{D}}$ sont les morphismes d'adjonction.

$\rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, bend left, "K"] \arrow[dr, bend left, "U"] & & \mathcal{C}^T \arrow[dl, bend left, "U^T"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend left, "F^T"] & \end{tikzcd}$$

$K \colon D \mapsto (U(D), U(\varepsilon_D))$ (le *foncteur de comparaison*)

L'adjonction (F, U) est *monadique* si K est une équivalence.

Monades et adjonctions

Une monade T sur une catégorie $\mathcal{C} \rightsquigarrow$ une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^T \arrow[d, bend left, "U^T"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F^T"] \end{tikzcd}$$

où $U^T(M, r) = M$ et $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$.

Une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ une monade $T = (UF, \mu := U(\varepsilon_F), \eta)$ sur $\mathcal{C}$

où $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to UF$ et $\varepsilon : FU \to 1_{\mathcal{D}}$ sont les morphismes d'adjonction.

$\rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, bend left, "K"] \arrow[dr, bend left, "U"] & & \mathcal{C}^T \arrow[dl, bend left, "U^T"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend left, "F^T"] & \end{tikzcd}$$

$K\colon D \mapsto (U(D), U(\varepsilon_D))$ (le *foncteur de comparaison*)

L'adjonction (F, U) est *monadique* si K est une équivalence.

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C}$

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *bimonade* si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est monoïdale et U^T est monoïdal strict.

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *bimonade* si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est monoïdale et U^T est monoïdal strict. Ceci équivaut à :

- T est un endofoncteur comonoïdal
  (avec $\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to TX \otimes TY$ et $\varepsilon : T\mathbb{1} \to \mathbb{1}$)
- μ et η sont des transformations naturelles comonoïdales.

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *bimonade* si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est monoïdale et U^T est monoïdal strict. Ceci équivaut à :

- T est un endofoncteur comonoïdal
  (avec $\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to TX \otimes TY$ et $\varepsilon : T\mathbb{1} \to \mathbb{1}$)
- μ et η sont des transformations naturelles comonoïdales.

Axiomes similaires à ceux d'une bigèbre, mais la compatibilité μ - Δ :

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *bimonade* si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est monoïdale et U^T est monoïdal strict. Ceci équivaut à :

- T est un endofoncteur comonoïdal (avec $\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to TX \otimes TY$ et $\varepsilon : T\mathbb{1} \to \mathbb{1}$)
- μ et η sont des transformations naturelles comonoïdales.

Axiomes similaires à ceux d'une bigèbre, mais la compatibilité μ - Δ :

$$\begin{tikzcd}
T^2(X \otimes Y) \arrow[r, "T\Delta_{X,Y}"] \arrow[d, "\mu_{X\otimes Y}"'] & T(TX \otimes TY) \arrow[r, "\Delta_{TX,TY}"] & T^2X \otimes T^2Y \arrow[d, "\mu_X \otimes \mu_Y"] \\
T(X \otimes Y) \arrow[rr, "\Delta_{X,Y}"'] & & TX \otimes TY
\end{tikzcd}$$

Bimonades [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *bimonade* si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est monoïdale et U^T est monoïdal strict. Ceci équivaut à :

- T est un endofoncteur comonoïdal (avec $\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to TX \otimes TY$ et $\varepsilon : T\mathbb{1} \to \mathbb{1}$)
- μ et η sont des transformations naturelles comonoïdales.

Axiomes similaires à ceux d'une bigèbre, mais la compatibilité μ - Δ :

$$\begin{tikzcd}
T^2(X \otimes Y) \arrow[r, "T\Delta_{X,Y}"] \arrow[d, "\mu_{X\otimes Y}"'] & T(TX \otimes TY) \arrow[r, "\Delta_{TX,TY}"] & T^2X \otimes T^2Y \arrow[d, "\mu_X \otimes \mu_Y"] \\
T(X \otimes Y) \arrow[rr, "\Delta_{X,Y}"'] & & TX \otimes TY
\end{tikzcd}$$

s'écrit sans qu'on ait besoin d'un tressage.

Monades de Hopf

Pour une bimonade T on définit les *opérateurs de fusion* (à droite et à gauche)

- $H^l(X, Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X, Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Monades de Hopf

Pour une bimonade T on définit les *opérateurs de fusion* (à droite et à gauche)

- $H^l(X,Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X,Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Une bimonade T est une *monade de Hopf* si les opérateurs de fusion sont des isos.

Monades de Hopf

Pour une bimonade T on définit les *opérateurs de fusion* (à droite et à gauche)

- $H^l(X,Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X,Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Une bimonade T est une *monade de Hopf* si les opérateurs de fusion sont des isos.

Proposition

Pour T bimonade sur $\mathcal{C}$ autonome, équivalence :

(i) $\mathcal{C}^T$ est autonome ;

(ii) T est une monade de Hopf ;

(iii) (1ère définition) T admet un antipode (unaire) à droite et à gauche $s^l_X \colon T({}^\vee TX) \to {}^\vee X$ et $s^r \colon T(TX^\vee) \to X^\vee$.

Monades de Hopf

Pour une bimonade T on définit les *opérateurs de fusion* (à droite et à gauche)

- $H^l(X, Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X, Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Une bimonade T est une *monade de Hopf* si les opérateurs de fusion sont des isos.

Proposition

Pour T bimonade sur $\mathcal{C}$ autonome, équivalence :

(i) $\mathcal{C}^T$ est autonome ;

(ii) T est une monade de Hopf ;

(iii) (1ère définition) T admet un antipode (unaire) à droite et à gauche $s^l_X \colon T({}^\vee TX) \to {}^\vee X$ et $s^r \colon T(TX^\vee) \to X^\vee$.

Il y a un résultat similaire pour les catégories closes (avec Homs internes).

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y}\colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)		

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y}\colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$

$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$

${}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire		

$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$ ${}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y}\colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X\colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X\colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	

$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N})$

${}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	$R_{X,Y} \colon X \otimes Y \to T(Y) \otimes T(X)$

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N}) \qquad {}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	$R_{X,Y} \colon X \otimes Y \to T(Y) \otimes T(X)$

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N}) \qquad {}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$$

$$\tau_{(M,r),(N,s)} = (s \otimes r) R_{M,N}$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y}\colon T(X\otimes Y)\to T(X)\otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X\colon T({}^\vee T(X))\to {}^\vee X$ $s^r_X\colon T(T(X)^\vee)\to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	$R_{X,Y}\colon X\otimes Y\to T(Y)\otimes T(X)$
en rubans		

$$(M,r)\otimes(N,s)=(M\otimes N,(r\otimes s)\Delta_{M,N})\qquad {}^\vee(M,r)=({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$$

$$\tau_{(M,r),(N,s)}=(s\otimes r)R_{M,N}$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	$R_{X,Y} \colon X \otimes Y \to T(Y) \otimes T(X)$
en rubans	en rubans	

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N}) \qquad {}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$$

$$\tau_{(M,r),(N,s)} = (s \otimes r) R_{M,N}$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y}\colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X\colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X\colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	$R_{X,Y}\colon X \otimes Y \to T(Y) \otimes T(X)$
en rubans	en rubans	$\theta_X\colon X \to T(X)$

$$(M,r) \otimes (N,s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N}) \qquad {}^\vee(M,r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$$

$$\tau_{(M,r),(N,s)} = (s \otimes r) R_{M,N}$$

Dictionnaire tannakien

Un dictionnaire tannakien relie les propriétés d'une monade T sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ et celles de sa catégorie de modules $\mathcal{C}^T$.

T	$\mathcal{C}^T$	*Morphisme de structure*
bimonade	monoïdal	$\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$
Monade de Hopf ($\mathcal{C}$ autonome)	autonome	$s^l_X \colon T({}^\vee T(X)) \to {}^\vee X$ $s^r_X \colon T(T(X)^\vee) \to X^\vee$
quasitriangulaire	tressée	$R_{X,Y} \colon X \otimes Y \to T(Y) \otimes T(X)$
en rubans	en rubans	$\theta_X \colon X \to T(X)$

$$(M, r) \otimes (N, s) = (M \otimes N, (r \otimes s)\Delta_{M,N}) \qquad {}^\vee(M, r) = ({}^\vee M, s^l_M T({}^\vee r))$$

$$\tau_{(M,r),(N,s)} = (s \otimes r)R_{M,N} \qquad \Theta_{(M,r)} = r\theta_M$$

Monade de Hopf définie par une adjonction

Soit $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ une adjonction comonoïdale ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont monoïdales et U est monoïdal fort)

Monade de Hopf définie par une adjonction

Soit $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ une adjonction comonoïdale ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont monoïdales et U est monoïdal fort)

Alors F est comonoïdal et $T = UF$ est une bimonade sur $\mathcal{C}$.

Monade de Hopf définie par une adjonction

Soit $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ une adjonction comonoïdale ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont monoïdales et U est monoïdal fort)

Alors F est comonoïdal et $T = UF$ est une bimonade sur $\mathcal{C}$.

Monade de Hopf définie par une adjonction

Soit $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ une adjonction comonoïdale ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont monoïdales et U est monoïdal fort)

Alors F est comonoïdal et $T = UF$ est une bimonade sur $\mathcal{C}$.

On a des transformations naturelles :

- $F(c \otimes Ud) \to Fc \otimes d$
- $F(Ud \otimes c) \to d \otimes Fc$

et (F, U) est une *adjonction (comonoïdale) de Hopf* si ces morphismes sont des isos.

Monade de Hopf définie par une adjonction

Soit $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ une adjonction comonoïdale ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont monoïdales et U est monoïdal fort)

Alors F est comonoïdal et $T = UF$ est une bimonade sur $\mathcal{C}$.

On a des transformations naturelles :

- $F(c \otimes Ud) \to Fc \otimes d$
- $F(Ud \otimes c) \to d \otimes Fc$

et (F, U) est une *adjonction (comonoïdale) de Hopf* si ces morphismes sont des isos.

C'est le cas si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont autonomes.

Monade de Hopf définie par une adjonction

Soit $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ une adjonction comonoïdale ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont monoïdales et U est monoïdal fort)

Alors F est comonoïdal et $T = UF$ est une bimonade sur $\mathcal{C}$.

On a des transformations naturelles :

- $F(c \otimes Ud) \to Fc \otimes d$
- $F(Ud \otimes c) \to d \otimes Fc$

et (F, U) est une *adjonction (comonoïdale) de Hopf* si ces morphismes sont des isos.

C'est le cas si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont autonomes.

Proposition

- Si l'adjonction (F, U) est Hopf, $T = UF$ est une monade de Hopf.
- Une bimonade T est Hopf ssi son adjonction (F^T, U^T) est Hopf

Comonades de Hopf

La notion de monade de Hopf n'est pas autoduale (à la différence de celle d'algèbre de Hopf) : si on renverse les flèches dans la définition, on obtient la notion de *comonade de Hopf*. Une comonade de Hopf est donc une comonade monoïdale dont les opérateurs de cofusion sont inversibles.

Comonades de Hopf

La notion de monade de Hopf n'est pas autoduale (à la différence de celle d'algèbre de Hopf) : si on renverse les flèches dans la définition, on obtient la notion de *comonade de Hopf*. Une comonade de Hopf est donc une comonade monoïdale dont les opérateurs de cofusion sont inversibles. Tous les résultats sur les monades de Hopf se traduisent en résultats sur les comonades de Hopf.

Comonades de Hopf

La notion de monade de Hopf n'est pas autoduale (à la différence de celle d'algèbre de Hopf) : si on renverse les flèches dans la définition, on obtient la notion de *comonade de Hopf*. Une comonade de Hopf est donc une comonade monoïdale dont les opérateurs de cofusion sont inversibles.
Tous les résultats sur les monades de Hopf se traduisent en résultats sur les comonades de Hopf.
En particulier, si T est une comonade de Hopf sur $\mathcal{C}$,

Comonades de Hopf

La notion de monade de Hopf n'est pas autoduale (à la différence de celle d'algèbre de Hopf) : si on renverse les flèches dans la définition, on obtient la notion de *comonade de Hopf*. Une comonade de Hopf est donc une comonade monoïdale dont les opérateurs de cofusion sont inversibles.
Tous les résultats sur les monades de Hopf se traduisent en résultats sur les comonades de Hopf.
En particulier, si T est une comonade de Hopf sur $\mathcal{C}$,

1. la catégorie $\mathcal{C}_T$ des T-comodules est monoïdale,

Comonades de Hopf

La notion de monade de Hopf n'est pas autoduale (à la différence de celle d'algèbre de Hopf) : si on renverse les flèches dans la définition, on obtient la notion de *comonade de Hopf*. Une comonade de Hopf est donc une comonade monoïdale dont les opérateurs de cofusion sont inversibles.
Tous les résultats sur les monades de Hopf se traduisent en résultats sur les comonades de Hopf.
En particulier, si T est une comonade de Hopf sur $\mathcal{C}$,

1. la catégorie $\mathcal{C}_T$ des T-comodules est monoïdale,
2. on a une adjonction Hopf monoïdale : $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend right, "U_T"'] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "F_T"'] \end{tikzcd}$

où U_T est le foncteur oubli et F_T son adjoint à droite, le foncteur comodule colibre.

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

H algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{B}$, tressage τ

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

H algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{B}$, tressage τ
$\rightsquigarrow T = H \otimes ?$ est une monade de Hopf sur $\mathcal{B}$

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

H algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{B}$, tressage τ
$\rightsquigarrow T = H \otimes ?$ est une monade de Hopf sur $\mathcal{B}$
La structure de monade de T vient de la structure d'algèbre de H

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

H algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{B}$, tressage τ
$\rightsquigarrow T = H\otimes ?$ est une monade de Hopf sur $\mathcal{B}$
La structure de monade de T vient de la structure d'algèbre de H
La structure comonoïdale est

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \tau_{H,X} \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y)\colon H \otimes X \otimes Y \to H \otimes X \otimes H \otimes Y$$

$$\varepsilon = \text{coünité de } H\colon H \to \mathbb{1}$$

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

H algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{B}$, tressage τ
$\rightsquigarrow T = H \otimes ?$ est une monade de Hopf sur $\mathcal{B}$
La structure de monade de T vient de la structure d'algèbre de H
La structure comonoïdale est

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \tau_{H,X} \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y) \colon H \otimes X \otimes Y \to H \otimes X \otimes H \otimes Y$$

$$\varepsilon = \text{coünité de } H \colon H \to \mathbb{1}$$

On a $\mathcal{B}^T =_H \mathrm{Mod}$ comme catégories monoïdales.

Monades de Hopf provenant d'algèbres de Hopf

Les monades de Hopf généralisent les algèbres de Hopf dans les catégories tressées

H algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{B}$, tressage τ
$\rightsquigarrow T = H \otimes ?$ est une monade de Hopf sur $\mathcal{B}$
La structure de monade de T vient de la structure d'algèbre de H
La structure comonoïdale est

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \tau_{H,X} \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y) \colon H \otimes X \otimes Y \to H \otimes X \otimes H \otimes Y$$
$$\varepsilon = \text{coünité de } H \colon H \to \mathbb{1}$$

On a $\mathcal{B}^T =_H \mathrm{Mod}$ comme catégories monoïdales.

Peut-on étendre cette construction à des catégories non tressées ?

Le centre de Joyal-Street

Le centre de Joyal-Street

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale $\xrightarrow[\text{de Joyal-Street}]{\text{Centre}}$ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ catégorie tressée

Le centre de Joyal-Street

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale $\xrightarrow[\textit{de Joyal-Street}]{\textit{Centre}}$ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ catégorie tressée

- Objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) =$ *demi-tressages* de $\mathcal{C}$:

  coupes (X, σ) avec $\sigma_Y : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ naturel en Y tq

$$\sigma_{Y \otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_Z)(\sigma_Y \otimes \mathrm{id}_Z)$$

Le centre de Joyal-Street

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale $\xrightarrow[\text{de Joyal-Street}]{\text{Centre}}$ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ catégorie tressée

- Objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ = *demi-tressages* de $\mathcal{C}$:

  coupes (X, σ) avec $\sigma_Y \colon X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ naturel en Y tq

$$\sigma_{Y \otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_Z)(\sigma_Y \otimes \mathrm{id}_Z)$$

- Les morphismes $f \colon (X, \sigma) \to (X', \sigma')$ dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ sont les morphismes $f \colon X \to X'$ dans $\mathcal{C}$ tq $\sigma'(f \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes f)\sigma$

Le centre de Joyal-Street

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale $\xrightarrow[\text{de Joyal-Street}]{\text{Centre}}$ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ catégorie tressée

- Objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ = *demi-tressages* de $\mathcal{C}$:

  coupes (X, σ) avec $\sigma_Y \colon X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ naturel en Y tq

  $$\sigma_{Y \otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_Z)(\sigma_Y \otimes \mathrm{id}_Z)$$

- Les morphismes $f \colon (X, \sigma) \to (X', \sigma')$ dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ sont les morphismes $f \colon X \to X'$ dans $\mathcal{C}$ tq $\sigma'(f \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes f)\sigma$
- $(X, \sigma) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} (X', \sigma') = \big(X \otimes X', (\sigma_Y \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma')\big)$

Le centre de Joyal-Street

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale $\xrightarrow[\text{de Joyal-Street}]{\text{Centre}}$ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ catégorie tressée

- Objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ = *demi-tressages* de $\mathcal{C}$:

  coupes (X, σ) avec $\sigma_Y \colon X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ naturel en Y tq

  $$\sigma_{Y \otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_Z)(\sigma_Y \otimes \mathrm{id}_Z)$$

- Les morphismes $f \colon (X, \sigma) \to (X', \sigma')$ dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ sont les morphismes $f \colon X \to X'$ dans $\mathcal{C}$ tq $\sigma'(f \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes f)\sigma$
- $(X, \sigma) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} (X', \sigma') = \big(X \otimes X', (\sigma_Y \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma')\big)$
- Tressage : $c_{(X,\sigma),(X',\sigma')} = \sigma_{X'}$

Le centre de Joyal-Street

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale $\xrightarrow[\text{de Joyal-Street}]{\text{Centre}}$ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ catégorie tressée

- Objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ = *demi-tressages* de $\mathcal{C}$:

  coupes (X, σ) avec $\sigma_Y \colon X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ naturel en Y tq

$$\sigma_{Y \otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_Z)(\sigma_Y \otimes \mathrm{id}_Z)$$

- Les morphismes $f \colon (X, \sigma) \to (X', \sigma')$ dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ sont les morphismes $f \colon X \to X'$ dans $\mathcal{C}$ tq $\sigma'(f \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes f)\sigma$
- $(X, \sigma) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} (X', \sigma') = \big(X \otimes X', (\sigma_Y \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma')\big)$
- Tressage : $c_{(X,\sigma),(X',\sigma')} = \sigma_{X'}$

Monades de Hopf représentables

Monades de Hopf représentables

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) algèbre de Hopf dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$
$\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, definie par $X \mapsto H \otimes X$.

Monades de Hopf représentables

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) algèbre de Hopf dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, definie par $X \mapsto H \otimes X$.
Structure comonoïdale :

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \sigma_X \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y)$$
$$\varepsilon = \text{coünité de } H$$

Monades de Hopf représentables

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) algèbre de Hopf dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, definie par $X \mapsto H \otimes X$.
Structure comonoïdale :

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \sigma_X \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y)$$
$$\varepsilon = \text{coünité de } H$$

De plus T est *augmentée*, c-à-d munie d'un morphisme de monades de Hopf

$$e = (\varepsilon \otimes ?) : T \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$$

Monades de Hopf représentables

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) algèbre de Hopf dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, definie par $X \mapsto H \otimes X$.
Structure comonoïdale :

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \sigma_X \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y)$$
$$\varepsilon = \text{coünité de } H$$

De plus T est *augmentée*, c-à-d munie d'un morphisme de monades de Hopf

$$e = (\varepsilon \otimes ?) : T \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$$

Théorème (BV+Lack)

Cette construction définit une équivalence de catégories

$$\{\{\text{alg. de Hopf dans } \mathcal{Z}(\mathcal{C})\}\} \xrightarrow{\simeq} \{\{\text{monades de Hopf augmentées sur } \mathcal{C}\}\}$$

Monadicité du centre

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie autonome, de centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Monadicité du centre

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie autonome, de centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.
Par dualité, on interprète un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ comme une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$

Monadicité du centre

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie autonome, de centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.
Par dualité, on interprète un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ comme une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralisable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tout $X \in \mathcal{C}$

Monadicité du centre

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie autonome, de centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.
Par dualité, on interprète un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ comme une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralisable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tout $X \in \mathcal{C}$ (noter que $Z(\mathbb{1})$ est le coend de $\mathcal{C}$). Alors un demi-tressage σ se code par un morphisme $\tilde{\sigma} : Z(X) \to X$.

Monadicité du centre

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie autonome, de centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.
Par dualité, on interprète un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ comme une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralisable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tout $X \in \mathcal{C}$ (noter que $Z(\mathbb{1})$ est le coend de $\mathcal{C}$). Alors un demi-tressage σ se code par un morphisme $\tilde{\sigma} \colon Z(X) \to X$.

Théorème (BV)

Si $\mathcal{C}$ est centralisable, alors $Z : X \mapsto Z(X)$ est une **monade de Hopf quasitriangulaire sur** $\mathcal{C}$ et on a un iso de catégories tressées

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) &\to \mathcal{C}^Z \\ (X, \sigma) &\mapsto (X, \tilde{\sigma}) \end{aligned}$$

Monadicité du centre

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie autonome, de centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.
Par dualité, on interprète un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ comme une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralisable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tout $X \in \mathcal{C}$ (noter que $Z(\mathbb{1})$ est le coend de $\mathcal{C}$). Alors un demi-tressage σ se code par un morphisme $\tilde{\sigma} : Z(X) \to X$.

Théorème (BV)

Si $\mathcal{C}$ est centralisable, alors $Z : X \mapsto Z(X)$ est une **monade de Hopf quasitriangulaire sur** $\mathcal{C}$ et on a un iso de catégories tressées

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) &\to \mathcal{C}^Z \\ (X, \sigma) &\mapsto (X, \tilde{\sigma}) \end{aligned}$$

Remarque : Une augmentation de Z = un tressage de $\mathcal{C}$.
Donc si $\mathcal{C}$ n'est pas tressée, Z n'est pas représentable par une algèbre de Hopf.

Le centraliseur d'une monade de Hopf

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale autonome.

Le centraliseur d'une monade de Hopf

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale autonome.
Une monade de Hopf T sur $\mathcal{C}$ est *centralisable* si

Le centraliseur d'une monade de Hopf

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale autonome.
Une monade de Hopf T sur $\mathcal{C}$ est *centralisable* si

$$Z_T(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee T(Y) \otimes X \otimes Y \quad \text{existe pour tout } X \in \mathrm{Ob}(X)$$

Proposition (BV)

Si T est une monade de Hopf centralisable, $Z_T \colon X \mapsto Z_T(X)$ est une monade de Hopf appelée le centralisateur de T.

Le centraliseur d'une monade de Hopf

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale autonome.
Une monade de Hopf T sur $\mathcal{C}$ est *centralisable* si

$$Z_T(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^{\vee}T(Y) \otimes X \otimes Y \quad \text{existe pour tout } X \in \mathrm{Ob}(X)$$

Proposition (BV)

Si T est une monade de Hopf centralisable, $Z_T \colon X \mapsto Z_T(X)$ est une monade de Hopf appelée le centralisateur de T.

En particulier la monade Z du transparent précédent est le centralisateur de $1_{\mathcal{C}}$.

Monades de Hopf et ‘groupoïdes quantiques’

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Monades de Hopf et ‘groupoïdes quantiques’

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Faits

- bimonades linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = bialgébroïdes au sens de Takeuchi [Szlachányi]

Monades de Hopf et ‘groupoïdes quantiques’

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Faits

- bimonades linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = bialgébroïdes au sens de Takeuchi [Szlachány]
- monades de Hopf linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = algébroïdes de Hopf au sens de Schauenburg.

Monades de Hopf et 'groupoïdes quantiques'

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Faits

- bimonades linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = bialgébroïdes au sens de Takeuchi [Szlachánii]
- monades de Hopf linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = algébroïdes de Hopf au sens de Schauenburg.

Les algébroïdes de Hopf sont des groupoïdes non-commutatifs.

Monades de Hopf et ‘groupoïdes quantiques’

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Faits

- bimonades linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = bialgébroïdes au sens de Takeuchi [Szlacháni]
- monades de Hopf linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = algébroïdes de Hopf au sens de Schauenburg.

Les algébroïdes de Hopf sont des groupoïdes non-commutatifs.
Axiomatique compliquée $\rightsquigarrow$ une adjonction de Hopf $\rightsquigarrow$ une monade de Hopf (axiomatique limpide).

Monades de Hopf et ‘groupoïdes quantiques’

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Faits

- bimonades linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = bialgébroïdes au sens de Takeuchi [Szlacháni]
- monades de Hopf linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = algébroïdes de Hopf au sens de Schauenburg.

Les algébroïdes de Hopf sont des groupoïdes non-commutatifs. Axiomatique compliquée $\rightsquigarrow$ une adjonction de Hopf $\rightsquigarrow$ une monade de Hopf (axiomatique limpide). Utilisant les monades de Hopf on montre

Théorème (BVL)

Une catégorie tensorielle finie $\mathcal{C}$ sur un corps $\Bbbk$ est $\otimes$-équivalente à la catégorie des modules sur un algébroïde de Hopf.

Monades de Hopf et ‘groupoïdes quantiques’

R anneau $\rightsquigarrow$ catégorie monoïdale de bimodules $({}_R Mod_R, \otimes_R, {}_R R_R)$.

Faits

- bimonades linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = bialgébroïdes au sens de Takeuchi [Szlacháni]
- monades de Hopf linéaires sur ${}_R Mod_R$ ayant un adjoint à droite = algébroïdes de Hopf au sens de Schauenburg.

Les algébroïdes de Hopf sont des groupoïdes non-commutatifs. Axiomatique compliquée $\rightsquigarrow$ une adjonction de Hopf $\rightsquigarrow$ une monade de Hopf (axiomatique limpide). Utilisant les monades de Hopf on montre

Théorème (BVL)

Une catégorie tensorielle finie $\mathcal{C}$ sur un corps $\Bbbk$ est $\otimes$-équivalente à la catégorie des modules sur un algébroïde de Hopf.

Etant donnée une $\Bbbk$- équivalence $\mathcal{C} \overset{\Bbbk}{\simeq}_R \; mod$, R $\Bbbk$- alg. de dim. finie, on construit un algébroïde de Hopf A sur R tq $\mathcal{C} \simeq \quad \mathrm{mod}\ A$.

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)
- Semisimplicité, critère de type Maschke

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)
- Semisimplicité, critère de type Maschke
- Le double de Drinfeld d'une monade de Hopf

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)
- Semisimplicité, critère de type Maschke
- Le double de Drinfeld d'une monade de Hopf
- Produits croisés

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)
- Semisimplicité, critère de type Maschke
- Le double de Drinfeld d'une monade de Hopf
- Produits croisés
- Bosonisation pour les monades de Hopf

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)
- Semisimplicité, critère de type Maschke
- Le double de Drinfeld d'une monade de Hopf
- Produits croisés
- Bosonisation pour les monades de Hopf
- Application à la comparaison des invariants quantiques

Quelques aspects de la théorie des monades de Hopf

- Dictionnaire tannakien
- Modules de Hopf et théorème de décomposition à la Sweedler
- Existence d'intégrales universelles (à valeurs dans une certaine autoéquivalence de $\mathcal{C}$)
- Semisimplicité, critère de type Maschke
- Le double de Drinfeld d'une monade de Hopf
- Produits croisés
- Bosonisation pour les monades de Hopf
- Application à la comparaison des invariants quantiques
- Application aux catégories tensorielles

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.

Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?

T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Théorème (BV)

- Z_T se relève canoniquement en une monade de Hopf $\tilde{Z}_T$ sur $\mathcal{C}^T$

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Théorème (BV)

- Z_T se relève canoniquement en une monade de Hopf $\tilde{Z}_T$ sur $\mathcal{C}^T$
- $\tilde{Z}_T$ est le centralisateur de $\mathcal{C}^T$

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Théorème (BV)

- Z_T se relève canoniquement en une monade de Hopf $\tilde{Z}_T$ sur $\mathcal{C}^T$
- $\tilde{Z}_T$ est le centralisateur de $\mathcal{C}^T$
- Il y a une loi distributive (au sens de Beck) canonique $\Omega\colon T \circ Z_T \to Z_T \circ T$

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Théorème (BV)

- Z_T se relève canoniquement en une monade de Hopf $\tilde{Z}_T$ sur $\mathcal{C}^T$
- $\tilde{Z}_T$ est le centralisateur de $\mathcal{C}^T$
- Il y a une loi distributive (au sens de Beck) canonique $\Omega\colon T \circ Z_T \to Z_T \circ T$
- $D_T = Z_T \circ_\Omega T$ est une monade de Hopf quasitriangulaire sur $\mathcal{C}$

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Théorème (BV)

- Z_T se relève canoniquement en une monade de Hopf $\tilde{Z}_T$ sur $\mathcal{C}^T$
- $\tilde{Z}_T$ est le centralisateur de $\mathcal{C}^T$
- Il y a une loi distributive (au sens de Beck) canonique $\Omega\colon T \circ Z_T \to Z_T \circ T$
- $D_T = Z_T \circ_\Omega T$ est une monade de Hopf quasitriangulaire sur $\mathcal{C}$
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T) \cong \mathcal{C}^{D_T}$ comme catégories tressées.

Double d'une monade de Hopf

H algèbre de Hopf de dim finie sur $\Bbbk \Rightarrow \mathcal{Z}(H\text{-}\mathrm{mod}) \cong D(H)\text{-}\mathrm{mod}$.
Peut-on faire pareil avec une monade de Hopf ?
T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$ autonome

Alors $\mathcal{C}^T$ est autonome et $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ est autonome tressée.

Supposons T centralisable $\rightsquigarrow$ Z_T monade de Hopf sur $\mathcal{C}$

Théorème (BV)

- Z_T se relève canoniquement en une monade de Hopf $\tilde{Z}_T$ sur $\mathcal{C}^T$
- $\tilde{Z}_T$ est le centralisateur de $\mathcal{C}^T$
- Il y a une loi distributive (au sens de Beck) canonique $\Omega\colon T \circ Z_T \to Z_T \circ T$
- $D_T = Z_T \circ_\Omega T$ est une monade de Hopf quasitriangulaire sur $\mathcal{C}$
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T) \cong \mathcal{C}^{D_T}$ comme catégories tressées.

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{coend}\big(\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)\big) = Z_{D_T}(\mathbb{1})$ est explicite avec ses morphismes structurels.

Le théorème de Müger revisité / l'invariant $RT_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion sphérique sur un *anneau* $\mathbb{k}$, (V_i) un système représentatif d'objets scalaires.

Le théorème de Müger revisité / l'invariant $RT_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion sphérique sur un *anneau* $\mathbb{k}$, (V_i) un système représentatif d'objets scalaires. Alors $T = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ est centralisable, de centralisateur Z défini par

$$Z(X) = \bigoplus_i {}^{\vee}V_i \otimes X \otimes V_i$$

Le théorème de Müger revisité / l'invariant $RT_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion sphérique sur un *anneau* $\mathbb{k}$, (V_i) un système représentatif d'objets scalaires. Alors $T = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ est centralisable, de centralisateur Z défini par

$$Z(X) = \bigoplus_i {}^\vee V_i \otimes X \otimes V_i$$

Le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est

$$C = Z_{D_T}(\mathbb{1}) = Z_Z(\mathbb{1}) = \bigoplus_{i,j \in I} {}^\vee V_i \otimes {}^\vee V_j \otimes {}^{\vee\vee} V_i \otimes V_j$$

Le théorème de Müger revisité / l'invariant $RT_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion sphérique sur un *anneau* $\Bbbk$, (V_i) un système représentatif d'objets scalaires. Alors $T = \mathrm{id}_\mathcal{C}$ est centralisable, de centralisateur Z défini par

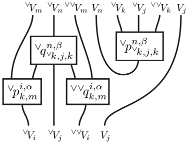
$$Z(X) = \bigoplus_i {}^\vee V_i \otimes X \otimes V_i$$

Le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est

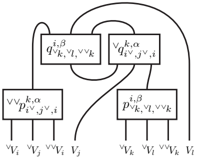
$$C = Z_{D_T}(\mathbb{1}) = Z_Z(\mathbb{1}) = \bigoplus_{i,j \in I} {}^\vee V_i \otimes {}^\vee V_j \otimes {}^{\vee\vee} V_i \otimes V_j$$

Tous les morphismes structurels de C peuvent être calculés, ainsi :

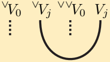
$$\Delta_C = \sum_{\substack{i,j,k,m,n \in I \\ 1 \leq \alpha \leq N_{k,m}^{k} \\ 1 \leq \beta \leq N_{{}^\vee k,j,k}^{n}}}$$



$$\omega_C = \sum_{\substack{i,j,k,l \in I \\ 1 \leq \alpha \leq N_{i^\vee,j^\vee,i}^{k} \\ 1 \leq \beta \leq N_{{}^\vee k,{}^\vee l,{}^{\vee\vee} k}^{i}}}$$

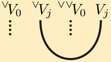


Théorème

$\alpha = \sum_{j \in I} \dim_q(V_j)$ 

$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

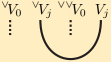
Théorème

$\alpha = \sum_{j \in I} \dim_q(V_j)$ 

$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

$\beta = \omega_C(\mathrm{id}_C \otimes \alpha) \colon C \to \mathbb{1}$ est une cointégrale de C

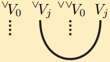
Théorème

$\alpha = \sum_{j \in I} \dim_q(V_j)$ 

$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

$\beta = \omega_C(\mathrm{id}_C \otimes \alpha) \colon C \to \mathbb{1}$ est une cointégrale de C et $\beta\alpha = 1$

Théorème

$\alpha = \sum_{j \in I} \dim_q(V_j)$ 

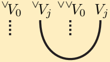
$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

$\beta = \omega_C(\mathrm{id}_C \otimes \alpha) \colon C \to \mathbb{1}$ est une cointégrale de C et $\beta\alpha = 1$

Conséquences :

- La monade Z est semisimple ssi $\dim \mathcal{C}$ est inversible
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est modulaire (c-à-d $\omega_C \colon C \otimes C \to \mathbb{1}$ est non dégénérée) dans tous les cas

Théorème

$\alpha = \sum_{j \in I} \dim_q(V_j)$ 

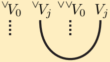
$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

$\beta = \omega_C(\mathrm{id}_C \otimes \alpha) \colon C \to \mathbb{1}$ est une cointégrale de C et $\beta\alpha = 1$

Conséquences :

- La monade Z est semisimple ssi $\dim \mathcal{C}$ est inversible
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est modulaire (c-à-d $\omega_C \colon C \otimes C \to \mathbb{1}$ est non dégénérée) dans tous les cas ($\Rightarrow$ le théorème de Müger lorsque $\dim \mathcal{C} \in \Bbbk^*$ et $\Bbbk$ corps alg. clos)

Théorème

$\alpha = \sum_{j \in I} \dim_q(V_j)$ 

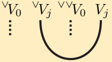
$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

$\beta = \omega_C(\mathrm{id}_C \otimes \alpha) \colon C \to \mathbb{1}$ est une cointégrale de C et $\beta\alpha = 1$

Conséquences :

- La monade Z est semisimple ssi $\dim \mathcal{C}$ est inversible
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est modulaire (c-à-d $\omega_C \colon C \otimes C \to \mathbb{1}$ est non dégénérée) dans tous les cas ($\Rightarrow$ le théorème de Müger lorsque $\dim \mathcal{C} \in \mathbb{k}^*$ et $\mathbb{k}$ corps alg. clos)
- $\mathrm{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(M) = \tau_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(M, \alpha)$ a un sens même dans le cas non semisimple (coeff de normalisation $\nu_L = 1$)

Théorème

$\alpha = \sum_{j\in I} \dim_q(V_j)$ 

$: \mathbb{1} \to C$ est une intégrale de C

$\beta = \omega_C(\mathrm{id}_C \otimes \alpha) : C \to \mathbb{1}$ est une cointégrale de C et $\beta\alpha = 1$

Conséquences :

- La monade Z est semisimple ssi $\dim \mathcal{C}$ est inversible
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est modulaire (c-à-d $\omega_C : C \otimes C \to \mathbb{1}$ est non dégénérée) dans tous les cas ($\Rightarrow$ le théorème de Müger lorsque $\dim \mathcal{C} \in \mathbb{k}^*$ et $\mathbb{k}$ corps alg. clos)
- $\mathrm{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(M) = \tau_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(M, \alpha)$ a un sens même dans le cas non semisimple (coeff de normalisation $\nu_L = 1$)

$$\tau_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(S^3; \alpha) = 1 \quad \text{et} \quad \tau_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(S^2 \times S^1; \alpha) = \dim \mathcal{C}$$

Le volet topologique de la preuve (Turaev-Virelizier)

L'invariant TV s'étend en une TQFT, c-à-d un foncteur monoïdal symétrique

$$TV\colon \mathrm{Cob} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$$

où $\mathrm{Cob} = \mathrm{Cob}(2+1)$ est la catégorie des $2+1$ cobordismes ; objets = surfaces (compactes orientées closes), morphismes = 3 variétés à bord compactes orientées.

Le volet topologique de la preuve (Turaev-Virelizier)

L'invariant TV s'étend en une TQFT, c-à-d un foncteur monoïdal symétrique

$$TV : \mathrm{Cob} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$$

où $\mathrm{Cob} = \mathrm{Cob}(2+1)$ est la catégorie des $2+1$ cobordismes ; objets = surfaces (compactes orientées closes), morphismes = 3 variétés à bord compactes orientées.

Turaev et Virelizier étendent la TQFT TV en une nouvelle TQFT

$$TV' : \mathrm{Cob}' \to \mathrm{vect}$$

où Cob' est la catégorie des cobordismes décorés par des entrelacs en rubans orientés colorés par les objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$

Le volet topologique de la preuve (Turaev-Virelizier)

L'invariant TV s'étend en une TQFT, c-à-d un foncteur monoïdal symétrique

$$TV : \mathrm{Cob} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$$

où $\mathrm{Cob} = \mathrm{Cob}(2+1)$ est la catégorie des $2+1$ cobordismes ; objets = surfaces (compactes orientées closes), morphismes = 3 variétés à bord compactes orientées.

Turaev et Virelizier étendent la TQFT TV en une nouvelle TQFT

$$TV' : \mathrm{Cob}' \to \mathrm{vect}$$

où Cob' est la catégorie des cobordismes décorés par des entrelacs en rubans orientés colorés par les objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$
de sorte que

- $TV'_{|\mathrm{Cob}} = TV$,
- $TV'(S^3, L^{\text{coloré}}) = \tau_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(L^{\text{coloré}})$.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \Bbbk[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \Bbbk[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

On a un morphisme canonique

$$e : \Bbbk[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$$

défini par $Z \in \Lambda \mapsto e_X = TV'(\mathbb{T}^X)$, où $\mathbb{T}^X$ est le tore plein dont l'âme est colorée par X.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \mathbb{k}[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

On a un morphisme canonique

$$e : \mathbb{k}[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$$

défini par $Z \in \Lambda \mapsto e_X = TV'(\mathbb{T}^X)$, où $\mathbb{T}^X$ est le tore plein dont l'âme est colorée par X.

Soit $M = S^3_L$, L étant un entrelacs en rubans à n composantes.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \mathbb{k}[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

On a un morphisme canonique

$$e : \mathbb{k}[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$$

défini par $Z \in \Lambda \mapsto e_X = TV'(\mathbb{T}^X)$, où $\mathbb{T}^X$ est le tore plein dont l'âme est colorée par X.

Soit $M = S^3_L$, L étant un entrelacs en rubans à n composantes. L'entrelacs L spécifie un plongement de n copies de $\mathbb{T}$ dans S^3.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \Bbbk[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

On a un morphisme canonique

$$e : \Bbbk[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$$

défini par $Z \in \Lambda \mapsto e_X = TV'(\mathbb{T}^X)$, où $\mathbb{T}^X$ est le tore plein dont l'âme est colorée par X.

Soit $M = S^3_L$, L étant un entrelacs en rubans à n composantes. L'entrelacs L spécifie un plongement de n copies de $\mathbb{T}$ dans S^3.

Posons $N = S^3 - n\mathring{\mathbb{T}}$. On a

$$S^3 = N \sqcup_{n\partial\mathbb{T}} n\mathbb{T} \quad \text{et} \quad M = N \sqcup_{\phi, n\partial\mathbb{T}} n\mathbb{T},$$

où ϕ est le difféo $(z, z') \mapsto (z', \overline{z})$ de $\partial\mathbb{T}$.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \mathbb{k}[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.
On a un morphisme canonique

$$e : \mathbb{k}[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$$

défini par $Z \in \Lambda \mapsto e_X = TV'(\mathbb{T}^X)$, où $\mathbb{T}^X$ est le tore plein dont l'âme est colorée par X.
Soit $M = S^3_L$, L étant un entrelacs en rubans à n composantes. L'entrelacs L spécifie un plongement de n copies de $\mathbb{T}$ dans S^3.
Posons $N = S^3 - n\mathring{\mathbb{T}}$. On a

$$S^3 = N \sqcup_{n\partial\mathbb{T}} n\mathbb{T} \quad \text{et} \quad M = N \sqcup_{\phi, n\partial\mathbb{T}} n\mathbb{T},$$

où ϕ est le difféo $(z, z') \mapsto (z', \overline{z})$ de $\partial\mathbb{T}$.
On a donc $TV(M) = TV'(M) = TV(N) \cdot \otimes^n TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}})$, et
$RT(M) = TV'(S^3, L^\alpha) = TV(N) \cdot \otimes^n e_\alpha$.

Soit C le coend de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ et Λ l'ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) \simeq \mathbb{k}[\Lambda]$$

est l'algèbre de fusion de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

On a un morphisme canonique

$$e : \mathbb{k}[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$$

défini par $Z \in \Lambda \mapsto e_X = TV'(\mathbb{T}^X)$, où $\mathbb{T}^X$ est le tore plein dont l'âme est colorée par X.

Soit $M = S^3_L$, L étant un entrelacs en rubans à n composantes. L'entrelacs L spécifie un plongement de n copies de $\mathbb{T}$ dans S^3.

Posons $N = S^3 - n\mathring{\mathbb{T}}$. On a

$$S^3 = N \sqcup_{n\partial\mathbb{T}} n\mathbb{T} \quad \text{et} \quad M = N \sqcup_{\phi, n\partial\mathbb{T}} n\mathbb{T},$$

où ϕ est le difféo $(z, z') \mapsto (z', \overline{z})$ de $\partial\mathbb{T}$.

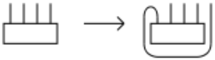
On a donc $TV(M) = TV'(M) = TV(N) \cdot \otimes^n TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}})$, et $RT(M) = TV'(S^3, L^\alpha) = TV(N) \cdot \otimes^n e_\alpha$.

Si on montre $e_\alpha = TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}})$, on aura donc $TV_{\mathcal{C}} = RT_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$.

Pour montrer $e_\alpha = TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}})$, on vérifie que le morphisme $e : \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(C)}(\mathbb{1}, C) = \Bbbk[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$ est bijectif, Pour montrer $e_\alpha = TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}})$, on vérifie que le morphisme $e : \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) = \Bbbk[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$ est bijectif, en comparant les constructions explicites de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C)$ et de $TV(\partial\mathbb{T})$ comme facteurs directs de

$$E = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \bigoplus_{i,j} V_i^* \otimes V_j^* \otimes V_i \otimes V_j)$$

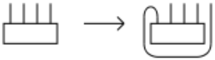
Le morphisme $TV'(\phi)$ correspond à la 'transformation de Fourier' $\Phi : E \to E$



Pour montrer $e_\alpha = TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}})$, on vérifie que le morphisme $e : \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C) = \Bbbk[\Lambda] \to TV(\partial\mathbb{T})$ est bijectif, en comparant les constructions explicites de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}, C)$ et de $TV(\partial\mathbb{T})$ comme facteurs directs de

$$E = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \bigoplus_{i,j} V_i^* \otimes V_j^* \otimes V_i \otimes V_j)$$

Le morphisme $TV'(\phi)$ correspond à la 'transformation de Fourier' $\Phi : E \to E$



On constate en particulier que $TV'(\phi)(e_{\mathbb{1}}) = e_\alpha$, d'où la conjecture.

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\Bbbk$

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\Bbbk$

H algèbre de Hopf $\longrightarrow$ *catégorie tensorielle* $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H$
+ *foncteur fibre* $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\Bbbk$

H algèbre de Hopf $\longrightarrow$ *catégorie tensorielle* $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H$
\+ *foncteur fibre* $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$

Reconstruction : étant donnée $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle + $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ foncteur fibre

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\mathbb{k}$

H algèbre de Hopf $\longrightarrow$ *catégorie tensorielle* $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H$
+ *foncteur fibre* $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$

Reconstruction : étant donnée $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle + $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ foncteur fibre

$$\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega) = \int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X) \otimes \omega(X)^* \qquad \text{algèbre de Hopf}$$

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\mathbb{k}$

H algèbre de Hopf $\longrightarrow$ *catégorie tensorielle* $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H$
+ *foncteur fibre* $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$

Reconstruction : étant donnée $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle + $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ foncteur fibre

$$\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega) = \int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X) \otimes \omega(X)^* \qquad \text{algèbre de Hopf}$$

avec un diagramme commutatif :

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\Bbbk$

H algèbre de Hopf $\longrightarrow$ *catégorie tensorielle* $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H$ + *foncteur fibre* $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$

Reconstruction : étant donnée $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle + $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ foncteur fibre

$$\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega) = \int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X) \otimes \omega(X)^* \qquad \text{algèbre de Hopf}$$

avec un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\simeq_\otimes"'] & & \mathrm{vect} \\ & \mathrm{comod}H \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Deux aspects de la théorie tannakienne

Désormais on travaille sur un corps $\mathbb{k}$

H algèbre de Hopf $\longrightarrow$ *catégorie tensorielle* $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H$ + *foncteur fibre* $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$

Reconstruction : étant donnée $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle + $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ foncteur fibre

$$\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega) = \int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X) \otimes \omega(X)^* \qquad \text{algèbre de Hopf}$$

avec un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\simeq_\otimes"'] & & \mathrm{vect} \\ & \mathrm{comod} H \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Un foncteur fibre est codé par une algèbre de Hopf (dans $\mathrm{Vect} = \mathrm{Indvect}$)

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$.

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H = \mathrm{rep} G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

G schéma en groupes affine $/\mathbb{k}$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H = \mathrm{rep}G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H = \mathrm{rep} G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+ \ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative,

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H = \mathrm{rep} G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative, $G = \mathrm{Spec} H$ et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{rep} G$ comme catégories tensorielles symétriques.

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H = \mathrm{rep} G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative, $G = \mathrm{Spec} H$ et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{rep} G$ comme catégories tensorielles symétriques.
Il existe une algèbre commutative A dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ tq

- $\forall X \in \mathcal{C}$, $A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules à gauche
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A) = \Bbbk$

G schéma en groupes affine $/\mathbb{k}$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H = \mathrm{rep} G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative, $G = \mathrm{Spec} H$ et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{rep} G$ comme catégories tensorielles symétriques.
Il existe une algèbre commutative A dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ tq

- $\forall X \in \mathcal{C}$, $A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules à gauche
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A) = \mathbb{k}$

et on a

$$\omega(X) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A \otimes X).$$

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H = \mathrm{rep}G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative, $G = \mathrm{Spec}H$ et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{rep}G$ comme catégories tensorielles symétriques.
Il existe une algèbre commutative A dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ tq

- $\forall X \in \mathcal{C}$, $A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules à gauche
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A) = \Bbbk$

et on a

$$\omega(X) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A \otimes X).$$

C'est l'algèbre trivialisante de Deligne.

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod}H = \mathrm{rep}G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative, $G = \mathrm{Spec}H$ et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{rep}G$ comme catégories tensorielles symétriques.
Il existe une algèbre commutative A dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ tq

- $\forall X \in \mathcal{C}$, $A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules à gauche
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A) = \Bbbk$

et on a

$$\omega(X) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A \otimes X).$$

C'est l'algèbre trivialisante de Deligne.

Un foncteur fibre symétrique est codé par une certaine algèbre commutative dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$.

G schéma en groupes affine $/\Bbbk$ = algèbre de Hopf commutative $H = \mathcal{O}(G)$. Alors $\mathcal{C} = \mathrm{comod} H = \mathrm{rep} G$ est symétrique et le foncteur fibre $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$ est symétrique.

Réciproquement : $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle symétrique $+\ \omega$ foncteur fibre symétrique $\rightsquigarrow H = \mathrm{Coend}(\omega)$ algèbre de Hopf commutative, $G = \mathrm{Spec} H$ et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{rep} G$ comme catégories tensorielles symétriques.
Il existe une algèbre commutative A dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ tq

- $\forall X \in \mathcal{C}$, $A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules à gauche
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A) = \Bbbk$

et on a

$$\omega(X) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, A \otimes X).$$

C'est l'algèbre trivialisante de Deligne.

Un foncteur fibre symétrique est codé par une certaine algèbre commutative dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$.

Existe-t-il des codages similaires pour tous les foncteurs tensoriels ?

Catégories tensorielles et foncteurs tensoriels

Definition

Une *catégorie tensorielle* est une catégorie abélienne $\Bbbk$- linéaire avec une structure de catégorie monoïdale autonome telle que :

- $\mathcal{C}$ est localement finie (les Homs sont de dim. finie, et les objets, de longeur finie)
- $\otimes$ est $\Bbbk$- bilinéaire et $\mathrm{End}(\mathbb{1}) = \Bbbk$

Definition

Un *foncteur tensoriel F* : $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur $\Bbbk$- linéaire exact monoïdal fort entre catégories tensorielles.

Exemples

1. vect est la catégorie tensorielle initiale

Exemples

1. vect est la catégorie tensorielle initiale
2. un foncteur fibre pour C est un foncteur tensoriel $C \to \mathrm{vect}$

Exemples

1. vect est la catégorie tensorielle initiale
2. un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ est un foncteur tensoriel $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$
3. un morphisme d'algèbres de Hopf $f : H \to H'$ induit un foncteur tensoriel
$$f_* : \mathrm{comod}H \to \mathrm{comod}H'$$

Exemples

1. vect est la catégorie tensorielle initiale
2. un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ est un foncteur tensoriel $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$
3. un morphisme d'algèbres de Hopf $f : H \to H'$ induit un foncteur tensoriel
$$f_* : \mathrm{comod} H \to \mathrm{comod} H'$$

La dualité tannakienne affirme qu'on a une équivalence

$$\{\{\text{alg. de Hopf}\}\} \simeq \{\{\text{catégories tensorielles}\}\} \ / \ \mathrm{vect}$$

Exemples

1. vect est la catégorie tensorielle initiale
2. un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ est un foncteur tensoriel $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$
3. un morphisme d'algèbres de Hopf $f : H \to H'$ induit un foncteur tensoriel
$$f_* : \mathrm{comod}H \to \mathrm{comod}H'$$

La dualité tannakienne affirme qu'on a une équivalence

$$\{\{\text{alg. de Hopf}\}\} \simeq \{\{\text{catégories tensorielles}\}\} \,/\, \mathrm{vect}$$

Mais toutes les catégories tensorielles n'ont pas de foncteur fibre !

Exemples

1. vect est la catégorie tensorielle initiale
2. un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$ est un foncteur tensoriel $\mathcal{C} \to \mathrm{vect}$
3. un morphisme d'algèbres de Hopf $f : H \to H'$ induit un foncteur tensoriel
$$f_* : \mathrm{comod} H \to \mathrm{comod} H'$$

La dualité tannakienne affirme qu'on a une équivalence

$$\{\{\text{alg. de Hopf}\}\} \simeq \{\{\text{catégories tensorielles}\}\} \,/\, \mathrm{vect}$$

Mais toutes les catégories tensorielles n'ont pas de foncteur fibre !

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Question 1

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{D}$?

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Question 1

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{D}$?

Oui, mais cette donnée ne peut pas être une algèbre de Hopf, car $\mathcal{D}$ n'est pas tressée.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Question 1

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{D}$?

Oui, mais cette donnée ne peut pas être une algèbre de Hopf, car $\mathcal{D}$ n'est pas tressée. C'est une comonade de Hopf.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Question 1

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{D}$?

Oui, mais cette donnée ne peut pas être une algèbre de Hopf, car $\mathcal{D}$ n'est pas tressée. C'est une comonade de Hopf.

Question 2

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$?

Oui, si F est *dominant.*

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Question 1

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{D}$?

Oui, mais cette donnée ne peut pas être une algèbre de Hopf, car $\mathcal{D}$ n'est pas tressée. C'est une comonade de Hopf.

Question 2

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$?

Oui, si F est *dominant.*
Cette donnée est une algèbre commutative

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel.

Question 1

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{D}$?

Oui, mais cette donnée ne peut pas être une algèbre de Hopf, car $\mathcal{D}$ n'est pas tressée. C'est une comonade de Hopf.

Question 2

Peut on coder F par une donnée algébrique dans $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$?

Oui, si F est *dominant.*
Cette donnée est une algèbre commutative dans le centre de $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$.

Modules de Hopf et le théorème de Sweedler pour les monades de Hopf

T monade de Hopf sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow T\mathbb{1}$ cogèbre dans $\mathcal{C}$ (coprod. $\Delta_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$, coünité ε)

Modules de Hopf et le théorème de Sweedler pour les monades de Hopf

T monade de Hopf sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow T\mathbb{1}$ cogèbre dans $\mathcal{C}$ (coprod. $\Delta_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$, coünité ε) $\rightsquigarrow$ se relève en une cogèbre $\hat{C} = F^T(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{C}^T$. De plus on a un isomorphisme naturel

$$\sigma : \hat{C} \otimes ? \to ? \otimes \hat{C}$$

Modules de Hopf et le théorème de Sweedler pour les monades de Hopf

T monade de Hopf sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow T\mathbb{1}$ cogèbre dans $\mathcal{C}$ (coprod. $\Delta_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$, coünité ε) $\rightsquigarrow$ se relève en une cogèbre $\hat{C} = F^T(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{C}^T$. De plus on a un isomorphisme naturel

$$\sigma : \hat{C} \otimes ? \to ? \otimes \hat{C}$$

Proposition (BVL)

σ est un demi-tressage

Modules de Hopf et le théorème de Sweedler pour les monades de Hopf

T monade de Hopf sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow T\mathbb{1}$ cogèbre dans $\mathcal{C}$ (coprod. $\Delta_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$, coünité ε) $\rightsquigarrow$ se relève en une cogèbre $\hat{C} = F^T(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{C}^T$. De plus on a un isomorphisme naturel

$$\sigma : \hat{C} \otimes ? \rightarrow ? \otimes \hat{C}$$

Proposition (BVL)

σ est un demi-tressage et $(\hat{C}, \sigma)$ est une cogèbre cocommutative dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ appelée la *cogèbre centrale induite* de T.

Modules de Hopf et le théorème de Sweedler pour les monades de Hopf

T monade de Hopf sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow T\mathbb{1}$ cogèbre dans $\mathcal{C}$ (coprod. $\Delta_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$, coünité ε) $\rightsquigarrow$ se relève en une cogèbre $\hat{C} = F^T(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{C}^T$. De plus on a un isomorphisme naturel

$$\sigma : \hat{C} \otimes ? \to ? \otimes \hat{C}$$

Proposition (BVL)

σ est un demi-tressage et $(\hat{C}, \sigma)$ est une cogèbre cocommutative dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ appelée la *cogèbre centrale induite* de T.

Un T- module de Hopf à droite est un $\hat{C}$-comodule (à droite) dans $\mathcal{C}^T$

Modules de Hopf et le théorème de Sweedler pour les monades de Hopf

T monade de Hopf sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow T\mathbb{1}$ cogèbre dans $\mathcal{C}$ (coprod. $\Delta_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$, coünité ε) $\rightsquigarrow$ se relève en une cogèbre $\hat{C} = F^T(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{C}^T$. De plus on a un isomorphisme naturel

$$\sigma : \hat{C} \otimes ? \to ? \otimes \hat{C}$$

Proposition (BVL)

σ est un demi-tressage et $(\hat{C}, \sigma)$ est une cogèbre cocommutative dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^T)$ appelée la *cogèbre centrale induite* de T.

Un T- module de Hopf à droite est un $\hat{C}$-comodule (à droite) dans $\mathcal{C}^T$, c-à-d une donnée (M, r, ∂) avec (M, r) T- module, (M, ∂) $T\mathbb{1}$- comodule + T- linearité of ∂.

Sous les hypothèses convenables (T conservatif, $\mathcal{C}$ a des coégalisateurs et T les préserve) :

Sous les hypothèses convenables (T conservatif, $\mathcal{C}$ a des coégalisateurs et T les préserve) :

Théorème (BVL)

- $X \mapsto (TX, \mu_X, \Delta_{X,\mathbb{1}})$ définit une équivalence de catégories

$$Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \{\{T\text{-modules de Hopf}\}\}$$

avec pour quasi-inverse le foncteur *partie coïnvariante*.

Sous les hypothèses convenables (T conservatif, $\mathcal{C}$ a des coégalisateurs et T les préserve) :

Théorème (BVL)

- $X \mapsto (TX, \mu_X, \Delta_{X,\mathbb{1}})$ définit une équivalence de catégories

  $$Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \{\{T\text{-}\,\text{modules de Hopf}\}\}$$

  avec pour quasi-inverse le foncteur *partie coïnvariante*.
- De plus si $\mathcal{C}$ a des égalisateurs préservés par T, Q est une équivalence monoïdale, la catégorie des modules de Hopf (c-a-d des $\hat{C}$- comodules) étant munie du produit cotensoriel sur $\hat{C}$.

Sous les hypothèses convenables (T conservatif, $\mathcal{C}$ a des coégalisateurs et T les préserve) :

Théorème (BVL)

- $X \mapsto (TX, \mu_X, \Delta_{X,\mathbb{1}})$ définit une équivalence de catégories

  $$Q : \mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \{\{T\text{-modules de Hopf}\}\}$$

  avec pour quasi-inverse le foncteur *partie coïnvariante*.
- De plus si $\mathcal{C}$ a des égalisateurs préservés par T, Q est une équivalence monoïdale, la catégorie des modules de Hopf (c-a-d des $\hat{C}$-comodules) étant munie du produit cotensoriel sur $\hat{C}$.

Si H est une algèbre de Hopf et $T = H\otimes ?$ on retrouve le théorème de Sweedler.

Preuve du théorème de Sweedler

Une adjonction $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow$ une comonade $\hat{T} = (FU, F(\eta_U), \varepsilon)$ sur $\mathcal{D}$.

Preuve du théorème de Sweedler

Une adjonction $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow$ une comonade $\hat{T} = (FU, F(\eta_U), \varepsilon)$ sur $\mathcal{D}$.

Notant $\mathcal{D}_{\hat{T}}$ la catégorie des $\hat{T}$-comodules on a un foncteur de

cocomparaison $\hat{K}$:

Preuve du théorème de Sweedler

Une adjonction $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow$ une comonade $\hat{T} = (FU, F(\eta_U), \varepsilon)$ sur $\mathcal{D}$.

Notant $\mathcal{D}_{\hat{T}}$ la catégorie des $\hat{T}$-comodules on a un foncteur de cocomparaison $\hat{K}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left] \arrow[rr, "\hat{K}"'] & & \mathcal{D}_{\hat{T}} \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

L'adjonction (F, U) est *comonadique* si $\hat{K}$ est une équivalence.

Preuve du théorème de Sweedler

Une adjonction
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ une comonade $\hat{T} = (FU, F(\eta_U), \varepsilon)$ sur $\mathcal{D}$.

Notant $\mathcal{D}_{\hat{T}}$ la catégorie des $\hat{T}$- comodules on a un foncteur de cocomparaison $\hat{K}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left] \arrow[rr, "\hat{K}"'] & & \mathcal{D}_{\hat{T}} \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

L'adjonction (F, U) est *comonadique* si $\hat{K}$ est une équivalence.

Si T est une monade sur $\mathcal{C}$, son adjonction est comonadique sous les 'hypothèses convenables' (descente), c-à-d $\hat{K} : \mathcal{C} \to (\mathcal{C}^T)_{\hat{T}}$ est une équivalence.

Preuve du théorème de Sweedler

Une adjonction $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow$ une comonade $\hat{T} = (FU, F(\eta_U), \varepsilon)$ sur $\mathcal{D}$.

Notant $\mathcal{D}_{\hat{T}}$ la catégorie des $\hat{T}$-comodules on a un foncteur de cocomparaison $\hat{K}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left] \arrow[rr, "\hat{K}"'] & & \mathcal{D}_{\hat{T}} \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

L'adjonction (F, U) est *comonadique* si $\hat{K}$ est une équivalence.

Si T est une monade sur $\mathcal{C}$, son adjonction est comonadique sous les 'hypothèses convenables' (descente), c-à-d $\hat{K} : \mathcal{C} \to (\mathcal{C}^T)_{\hat{T}}$ est une équivalence.

Pour T monade de Hopf, on a un iso de comonades sur $\mathcal{C}^T$

$$\phi : \hat{T} \xrightarrow{\sim} ? \otimes \hat{C}$$

défini par $\phi_{(M,r)} = (r \otimes \mathrm{id}_{T(\mathbb{1})}) T_{M,\mathbb{1}} : TM \to M \otimes T\mathbb{1}$.

Donc ${\mathcal{C}^T}_{\hat{T}} \xrightarrow{\sim} \{\{T\text{-modules de Hopf}\}\}$ $\square$

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tensorielle, son Ind-complété $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale abélienne contenant $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine et dont les objets sont les limites inductives filtrantes formelles d'objets de $\mathcal{C}$. Elle n'est pas autonome !

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tensorielle, son Ind-complété $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale abélienne contenant $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine et dont les objets sont les limites inductives filtrantes formelles d'objets de $\mathcal{C}$. Elle n'est pas autonome ! Par exemple $\mathrm{Ind}\,\mathrm{vect} = \mathrm{Vect}$, et $\mathrm{Ind}\,\mathrm{comod}H = \mathrm{Comod}H$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tensorielle, son Ind-complété $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale abélienne contenant $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine et dont les objets sont les limites inductives filtrantes formelles d'objets de $\mathcal{C}$. Elle n'est pas autonome ! Par exemple $\mathrm{Ind}\,\mathrm{vect} = \mathrm{Vect}$, et $\mathrm{Ind}\,\mathrm{comod}H = \mathrm{Comod}H$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tensorielle, son Ind-complété $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale abélienne contenant $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine et dont les objets sont les limites inductives filtrantes formelles d'objets de $\mathcal{C}$. Elle n'est pas autonome ! Par exemple $\mathrm{Ind}\,\mathrm{vect} = \mathrm{Vect}$, et $\mathrm{Ind}\,\mathrm{comod}H = \mathrm{Comod}H$.

Théorème

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ foncteur tensoriel. Il existe une comonade de Hopf $\mathbb{k}$- linéaire exacte à gauche sur $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ telle qu'on ait un diagramme commutatif

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie tensorielle, son Ind-complété $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale abélienne contenant $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine et dont les objets sont les limites inductives filtrantes formelles d'objets de $\mathcal{C}$. Elle n'est pas autonome ! Par exemple $\mathrm{Ind}\,\mathrm{vect} = \mathrm{Vect}$, et $\mathrm{Ind}\,\mathrm{comod} H = \mathrm{Comod} H$.

Théorème

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ foncteur tensoriel. Il existe une comonade de Hopf $\Bbbk$- linéaire exacte à gauche sur $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ telle qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\simeq_\otimes"'] & & \mathcal{D} \\ & \mathcal{D}_T \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{D}_T$ = catégorie des T-comodules d'Ind-objet sous jacent dans $\mathcal{D}$.

Preuve

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'étend en un foncteur linéaire fidèle exact $\mathrm{Ind}\, F : \mathrm{Ind}\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}$ préservant les limites inductives et monoïdal fort.

Preuve

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'étend en un foncteur linéaire fidèle exact $\mathrm{Ind}\, F : \mathrm{Ind}\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}$ préservant les limites inductives et monoïdal fort. $\mathrm{Ind}\, F$ a un adjoint à droite, noté R et appelé Ind-adjoint de F.

Preuve

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'étend en un foncteur linéaire fidèle exact $\mathrm{Ind}\, F : \mathrm{Ind}\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}$ préservant les limites inductives et monoïdal fort. $\mathrm{Ind}\, F$ a un adjoint à droite, noté R et appelé Ind-adjoint de F. L'adjonction $(\mathrm{Ind}\, F, R)$ est monoïdale et Hopf.

Preuve

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'étend en un foncteur linéaire fidèle exact $\mathrm{Ind}\, F : \mathrm{Ind}\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}$ préservant les limites inductives et monoïdal fort. $\mathrm{Ind}\, F$ a un adjoint à droite, noté R et appelé Ind-adjoint de F. L'adjonction $(\mathrm{Ind}\, F, R)$ est monoïdale et Hopf. Sa comonade $T = \mathrm{Ind}\, F\, R$ est une comonade de Hopf sur $\mathrm{Ind}\, \mathcal{C}$.

Preuve

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'étend en un foncteur linéaire fidèle exact $\mathrm{Ind}\, F : \mathrm{Ind}\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}$ préservant les limites inductives et monoïdal fort.
$\mathrm{Ind}\, F$ a un adjoint à droite, noté R et appelé Ind-adjoint de F.
L'adjonction $(\mathrm{Ind}\, F, R)$ est monoïdale et Hopf. Sa comonade $T = \mathrm{Ind}\, F\, R$ est une comonade de Hopf sur $\mathrm{Ind}\, \mathcal{C}$.
$\mathrm{Ind}\, F$ étant fidèle exact, l'adjonction est comonadique par Beck, d'où le théorème.

Preuve

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'étend en un foncteur linéaire fidèle exact $\mathrm{Ind}\, F : \mathrm{Ind}\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}$ préservant les limites inductives et monoïdal fort.
$\mathrm{Ind}\, F$ a un adjoint à droite, noté R et appelé Ind-adjoint de F.
L'adjonction $(\mathrm{Ind}\, F, R)$ est monoïdale et Hopf. Sa comonade $T = \mathrm{Ind}\, F\, R$ est une comonade de Hopf sur $\mathrm{Ind}\, \mathcal{C}$.
$\mathrm{Ind}\, F$ étant fidèle exact, l'adjonction est comonadique par Beck, d'où le théorème.

Exemple

Si $\mathcal{D} = \mathrm{vect}$, une comonade de Hopf linéaire sur Vect est de la forme $H \otimes ?$, H algèbre de Hopf, et on retrouve le résultat tannakien usuel.

Un foncteur tensoriel $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est *dominant* si son Ind-adjoint R est fidèle exact.

Théorème

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur tensoriel dominant, il existe une algèbre commutative (A, σ) dans $\mathcal{Z}(\mathrm{Ind}\mathcal{C})$ - l'algèbre centrale induite de T - telle qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F_A"] \arrow[dr, "F"'] & & A\text{-}\mathrm{Mod}_{ft} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "\simeq_\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

où $A\text{-}\mathrm{Mod}_{ft}$ est la catégorie des A-modules dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ qui sont quotients de $A \otimes c$ pour $c \in \mathcal{C}$, avec produit tensoriel $\otimes_{A,\sigma}$, et F_A est le foncteur tensoriel $X \mapsto A \otimes X$.

Si $\mathcal{D} = \mathrm{vect}$ et $\mathcal{C}$, F sont symétriques, alors A est l'algèbre trivialisante de Deligne.

Preuve

Appliquons le théorème de structure des modules de Hopf dans sa forme duale, à la comonade de Hopf T de l'adjonction $(\operatorname{Ind} F, R)$. Soit (A, σ) l'algèbre centrale induite de T (notion duale de la cogèbre centrale induite). Alors (A, σ) est une algèbre cocommutative dans $\mathcal{Z}(\operatorname{Ind} \mathcal{C})$ (identifiant $\operatorname{Ind} \mathcal{C}$ et $\operatorname{Ind}(\mathcal{D})_T$). La catégorie $A\text{-}\mathrm{Mod}$ des A-modules dans $\operatorname{Ind} \mathcal{C}$ est monoïdale avec produit tensoriel $\otimes_A$ et objet unité A. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ind} \mathcal{C} \arrow[rr, "F_A"] \arrow[dr, "F"'] & & A\text{-}\mathrm{Mod} \\ & \operatorname{Ind} \mathcal{D} \arrow[ur, "\simeq_\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

Le foncteur de cocomparaison $\operatorname{Ind} \mathcal{D} \simeq A\text{-}\mathrm{Mod}$ induit une équivalence $\mathcal{D} \simeq A\text{-}\mathrm{Mod}_{ft}$. D'où le théorème.

Une suite exacte d'algèbres de Hopf au sens de Schneider est une suite

$$K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} H'$$

d'algèbres de Hopf tq

1. $p^{-1}(0)$ est un ideal de Hopf normal de H ;
2. H est fidèlement coplat à droite sur H' ;
3. i est un noyau catégorique de p.

Une suite exacte d'algèbres de Hopf au sens de Schneider est une suite

$$K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} H'$$

d'algèbres de Hopf tq

1. $p^{-1}(0)$ est un ideal de Hopf normal de H ;
2. H est fidèlement coplat à droite sur H' ;
3. i est un noyau catégorique de p.

On étend cette notion aux catégories tensorielles.

Une suite exacte d'algèbres de Hopf au sens de Schneider est une suite

$$K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} H'$$

d'algèbres de Hopf tq

1. $p^{-1}(0)$ est un ideal de Hopf normal de H ;
2. H est fidèlement coplat à droite sur H' ;
3. i est un noyau catégorique de p.

On étend cette notion aux catégories tensorielles.
Pour $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle, on note $\mathrm{vect} \subset \mathcal{C}$ la sous-catégorie tensorielle replète engendrée par $\mathbb{1}$ (cat. des objets triviaux).

Une suite exacte d'algèbres de Hopf au sens de Schneider est une suite

$$K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} H'$$

d'algèbres de Hopf tq

1. $p^{-1}(0)$ est un ideal de Hopf normal de H ;
2. H est fidèlement coplat à droite sur H' ;
3. i est un noyau catégorique de p.

On étend cette notion aux catégories tensorielles.
Pour $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle, on note $\mathrm{vect} \subset \mathcal{C}$ la sous-catégorie tensorielle replète engendrée par $\mathbb{1}$ (cat. des objets triviaux).
Pour $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ foncteur tensoriel, on définit une sous catégorie tensorielle replète de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{K}_F = \{X \in \mathcal{C} \mid F(X) \in \mathrm{vect}\}$$

Une suite exacte d'algèbres de Hopf au sens de Schneider est une suite

$$K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} H'$$

d'algèbres de Hopf tq

1. $p^{-1}(0)$ est un ideal de Hopf normal de H ;
2. H est fidèlement coplat à droite sur H' ;
3. i est un noyau catégorique de p.

On étend cette notion aux catégories tensorielles.
Pour $\mathcal{C}$ catégorie tensorielle, on note $\mathrm{vect} \subset \mathcal{C}$ la sous-catégorie tensorielle replète engendrée par $\mathbb{1}$ (cat. des objets triviaux).
Pour $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ foncteur tensoriel, on définit une sous catégorie tensorielle replète de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{K}_F = \{X \in \mathcal{C} \mid F(X) \in \mathrm{vect}\}$$

F induit un foncteur fibre $\mathcal{K}_F \to \mathrm{vect}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, F(X))$.

F est *normal* si son Ind adjoint R satisfait $R(\mathbb{1}) \in \operatorname{Ind} \mathcal{K}_F$.

F est *normal* si son Ind adjoint R satisfait $R(\mathbb{1}) \in \mathrm{Ind}\,\mathcal{K}_F$.

Cela signifie que la sous-catégorie triviale $\mathrm{Vect} \subset \mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est stable sous la comonade de Hopf $T = UR$ qui code F.

F est *normal* si son Ind adjoint R satisfait $R(\mathbb{1}) \in \mathrm{Ind}\,\mathcal{K}_F$.

Cela signifie que la sous-catégorie triviale $\mathrm{Vect} \subset \mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est stable sous la comonade de Hopf $T = UR$ qui code F.
Si F est dominant et donc codé par une algèbre commutative (A, σ) dans $\mathcal{Z}(\mathrm{Ind}\,\mathcal{C})$ alors F est normal ssi A est *auto-trivialisante* (c-à-d $A \otimes A$ est trivial comme A-module à gauche).

F est *normal* si son Ind adjoint R satisfait $R(\mathbb{1}) \in \mathrm{Ind}\,\mathcal{K}_F$.

Cela signifie que la sous-catégorie triviale $\mathrm{Vect} \subset \mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ est stable sous la comonade de Hopf $T = UR$ qui code F.
Si F est dominant et donc codé par une algèbre commutative (A, σ) dans $\mathcal{Z}(\mathrm{Ind}\,\mathcal{C})$ alors F est normal ssi A est *auto-trivialisante* (c-à-d $A \otimes A$ est trivial comme A-module à gauche).
Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont de fusion, alors

1. F est dominant ssi tout objet simple de $\mathcal{D}$ est facteur direct de l'image d'un objet simple de $\mathcal{C}$;
2. F est normal ssi le seul objet simple X de $\mathcal{C}$ tq $\mathbb{1} \subset F(X)$ est $\mathbb{1}$.

Définition

Une suite de catégories tensorielles

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}''$$

est *exacte* si

1. F est normal et dominant ;
2. f induit une équivalence tensorielle $\mathcal{C}' \to \mathcal{K}_F$.

Définition

Une suite de catégories tensorielles

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}''$$

est *exacte* si

1. F est normal et dominant ;
2. f induit une équivalence tensorielle $\mathcal{C}' \to \mathcal{K}_F$.

Si $H' \to H \to H''$ est une suite exacte d'algèbres de Hopf alors

$$\mathrm{comod} H' \to \mathrm{comod} H \to \mathrm{comod} H''$$

est une suite exacte de catégories tensorielles, et, si H est de dimension finie,

$$\text{mod } H'' \to \quad \text{mod } H \to \quad \text{mod } H'$$

est aussi une suite exacte de catégories tensorielles.

Une suite exacte $\mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'$ donne un foncteur fibre pour $\mathcal{C}'$ d'où une algèbre de Hopf H telle que $\mathcal{C}' \simeq \mathrm{comod} H$.

Une suite exacte $\mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'$ donne un foncteur fibre pour $\mathcal{C}'$ d'où une algèbre de Hopf H telle que $\mathcal{C}' \simeq \mathrm{comod} H$.
Les suites exactes de catégories tensorielles sont classifiées par certaines (co)monades de Hopf.

Une suite exacte $\mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'$ donne un foncteur fibre pour $\mathcal{C}'$ d'où une algèbre de Hopf H telle que $\mathcal{C}' \simeq \mathrm{comod} H$.
Les suites exactes de catégories tensorielles sont classifiées par certaines (co)monades de Hopf.
Une comonade de Hopf linéaire T sur $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ est *normale* si $T(\mathbb{1}) \in \mathrm{Vect}$.
Alors T se restreint en une algèbre de Hopf $H = H(T)$ sur Vect.

Une suite exacte $\mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'$ donne un foncteur fibre pour $\mathcal{C}'$ d'où une algèbre de Hopf H telle que $\mathcal{C}' \simeq \mathrm{comod} H$.
Les suites exactes de catégories tensorielles sont classifiées par certaines (co)monades de Hopf.
Une comonade de Hopf linéaire T sur $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ est *normale* si $T(\mathbb{1}) \in \mathrm{Vect}$.
Alors T se restreint en une algèbre de Hopf $H = H(T)$ sur Vect.
Si en outre T est fidèle on a une suite exacte de catégories tensorielles

$$\mathrm{comod} H \to \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}$$

et toutes les suites exactes $\mathcal{D}' \to \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont de cette forme à équivalences tensorielles près (avec la même algèbre de Hopf associée)

Exemple - Equivariantisation

Soit G un groupe fini agissant sur une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ par autoéquivalences tensorielles $(T_g)_{g \in G}$. Alors on a une suite exacte

$$\mathrm{rep} G \to \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$ est le foncteur d'équivariantisation.

Exemple - Equivariantisation

Soit G un groupe fini agissant sur une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ par autoéquivalences tensorielles $(T_g)_{g \in G}$. Alors on a une suite exacte

$$\mathrm{rep} G \to \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$ est le foncteur d'équivariantisation.
L'endofoncteur $T = \bigoplus T_g$ admet une structure de comonade de Hopf T_G (et aussi une structure de monade de Hopf), et $\mathcal{C}^G = \mathcal{C}_{T_G}$. La comonade de Hopf T_G est normale fidèle exacte, avec algèbre de Hopf associée $\mathbb{k}^G$.

Exemple - Equivariantisation

Soit G un groupe fini agissant sur une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ par autoéquivalences tensorielles $(T_g)_{g\in G}$. Alors on a une suite exacte

$$\mathrm{rep}G \to \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$ est le foncteur d'équivariantisation.
L'endofoncteur $T = \bigoplus T_g$ admet une structure de comonade de Hopf T_G (et aussi une structure de monade de Hopf), et $\mathcal{C}^G = \mathcal{C}_{T_G}$. La comonade de Hopf T_G est normale fidèle exacte, avec algèbre de Hopf associée $\Bbbk^G$.

Une comonade de Hopf T sur $\mathcal{C}$ provient d'une équivariantisation ssi elle est normale fidèle exacte, et *commutative*

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{1} \otimes TX \arrow[rr, "\frac{1}{2}\text{ tressage can.}"] \arrow[dr] & & TX \otimes T\mathbb{1} \arrow[dl] \\ & TX & \end{tikzcd}$$

et son algèbre de Hopf associée est de dim. finie scindée ($\simeq \Bbbk^G$).

Exemple - Modularisation

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel tressé entre catégories tensorielles tressées.

Exemple - Modularisation

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel tressé entre catégories tensorielles tressées. Si F est normal, sa comonade de Hopf est commutative.

Exemple - Modularisation

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel tressé entre catégories tensorielles tressées. Si F est normal, sa comonade de Hopf est commutative.

Corollaire : un foncteur tensoriel tressé normal entre des catégories de fusion tressées est une équivariantisation.

Exemple - Modularisation

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel tressé entre catégories tensorielles tressées. Si F est normal, sa comonade de Hopf est commutative.

Corollaire : un foncteur tensoriel tressé normal entre des catégories de fusion tressées est une équivariantisation.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire. Sa modularisation [Müger, B] $F : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ peut être construite ainsi :

Exemple - Modularisation

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel tressé entre catégories tensorielles tressées. Si F est normal, sa comonade de Hopf est commutative.

Corollaire : un foncteur tensoriel tressé normal entre des catégories de fusion tressées est une équivariantisation.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire. Sa modularisation [Müger, B] $F : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ peut être construite ainsi : Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ la catégorie des objets transparents, qu'on suppose tannakienne. Soit A son algèbre trivialisante ; alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est la catégorie des A-modules. Ainsi F est normal (car A est auto-trivialisante) et dominant, et donc c'est une équivariantisation. On a donc une suite exacte :

$$\mathcal{T} \to \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}.$$

Exemple - Modularisation

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tensoriel tressé entre catégories tensorielles tressées. Si F est normal, sa comonade de Hopf est commutative.

Corollaire : un foncteur tensoriel tressé normal entre des catégories de fusion tressées est une équivariantisation.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire. Sa modularisation [Müger, B] $F : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ peut être construite ainsi : Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ la catégorie des objets transparents, qu'on suppose tannakienne. Soit A son algèbre trivialisante ; alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est la catégorie des A-modules. Ainsi F est normal (car A est auto-trivialisante) et dominant, et donc c'est une équivariantisation. On a donc une suite exacte :

$$\mathcal{T} \to \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}.$$

Les démodularisations d'une catégorie modulaire $\mathcal{D}$ sont classifiées par les comonades de Hopf normales sur $\mathcal{D}$ qui sont compatibles à la structure en rubans au sens évident.

Textes sur les monades de Hopf

BV1. *Hopf Diagrams and Quantum Invariants,* AGT **5** (2005) 1677-1710.

Où les diagrammes de Hopf sont introduits comme moyen de calculer l'invariant de Reshetikhin-Turaev en termes du coend d'une catégorie en rubans et de ses morphismes structurels.

BV2. *Hopf Monads,* Advances in Math. **215** (2007), 679-733.

Où la notion de monade de Hopf est introduite.

BV3. *Categorical Centers and Reshetikhin-Turaev Invariants,* Acta Mathematica Vietnamica **33** 3, 255-279

Où le coend du centre d'une catégorie de fusion sphérique sur un anneau est décrit, la modularité du centre, prouvée, et l'invariant de Reshetikhin-Turaev associé, construit.

BV4. *Quantum Double of Hopf monads and Categorical Centers,* arXiv :0812.2443, to appear in Transactions of the American Mathematical Society (2010)

Où la théorie générale du centralisateur et du double d'une monade de Hopf sont développés.

BLV. *Hopf Monads on Monoidal Categories,* arXiv :1003.1920.

Où les monades de Hopf sont redéfinies dans le monde monoïdal.

BN. *Exact sequences of tensor categories*, arXiv :1006.0569.

Voir aussi : `http://www.math.univ-montp2.fr/~bruguieres/recherche.html`